


2 volumes
#15.—



Digitized by the Internet Archive
in 2022 with funding from
Kahle/Austin Foundation

62507245
7π

VORLESUNGEN
ÜBER
HYDRODYNAMISCHE FERNKRÄFTE

NACH
C. A. BJERKNES' THEORIE

VON
V. BJERKNES,
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT STOCKHOLM.

BAND I.
MIT VIERZIG FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,
VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.
1900.

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung, vorbehalten.



Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

532.5

B626

v. 1.

BAND I.

DIE BEWEGUNG EINES SYSTEMS VON KUGELN
MIT VERÄNDERLICHEM VOLUMEN
IN EINER INKOMPRESSIBLEN REIBUNGSLOSEN
FLÜSSIGKEIT.

THEORIE DER SCHEINBAREN FERNKRÄFTE
HYDRODYNAMISCHEN URSPRUNGES.

Vorwort.

Die in diesem Buche dargestellten Untersuchungen rühren alle von Professor C. A. BJERKNES in Christiania her. Eine Ausarbeitung seiner Resultate für Publikation hat er aber selbst nie vorgenommen. Diese Arbeit hat deshalb der unterzeichnete Verfasser als sein Sohn und vieljähriger Mitarbeiter übernommen.

Den ersten Versuch zu einer systematischen Darstellung des in diesem ersten Bande behandelten Gegenstandes habe ich in meinen Vorlesungen an der Universität Stockholm im Frühjahrsemester 1893 gemacht. Dasselbe Thema habe ich auch im Herbstsemester 1896 und zum Teil im Frühjahrsemester 1899 wieder aufgenommen. Durch die weitere Bearbeitung dieser Vorlesungen ist das Buch entstanden.

Herrn F. KIRCHNER in Leipzig bin ich zu großem Dank verpflichtet für seine wertvolle Unterstützung bei der Richtigstellung des deutschen Textes und bei der Korrektur.

Stockholm 1899.

V. Bjerknes.

Inhalt.

Einleitung	Seite 1
----------------------	------------

Erster Teil.

Voraussetzungen allgemeiner Natur.

Erster Abschnitt.

Aus der Theorie der Vektorfelder.

1. Vektorgröße und Vektorfeld	9
2. Vektorlinien, Vektorröhren, Vektorfluß	10
3. Die Vektorkomponenten an Unstetigkeitsflächen	11
4. Divergenz und Wirbel eines Vektors	12
5. Solenoidales Vektorfeld	13
6. Potentielles oder lamelläres Vektorfeld	13
7. Laplace'sches Vektorfeld	15
8. Solenoidale Grenzflächenbedingung	15
9. Potentielle oder lamelläre Grenzflächenbedingungen	16
10. Eindeutige Bestimmtheit des Laplace'schen Vektorfeldes durch Grenzflächenbedingungen	16
11. Eindeutige Bestimmtheit der vollständigen Vektorfelder durch Divergenz und Wirbel	18

Zweiter Abschnitt.

Aus den Prinzipien der Hydrodynamik.

12. Die Euler'sche Fassung der hydrodynamischen Probleme	19
13. Die kinematischen Bedingungen	19
14. Die dynamischen Bedingungen	20
15. Solenoidalbewegung	21

	Seite
15. Wirbelfreie Bewegung	22
16. Bewegung fremder Körper in der Flüssigkeit	23

Zweiter Teil.

Kinematische Untersuchung der Flüssigkeitsbewegungen bei gegebenen Bewegungen der Kugeln.

Erster Abschnitt.

Volumändernde Kugeln.

17. Koordinaten und Geschwindigkeitskomponenten einer Kugel . . .	25
18. Volumändernde Kugel	26
19. Totale und spezifische Volumenausdehnungsgeschwindigkeit . . .	27
20. Das Feld der volumändernden Kugel	28
21. Mittelwerte periodischer Funktionen	30
22. Pulsierende Kugel	30
23. Ein System von volumändernden Kugeln	32
24. Zwei volumändernde Kugeln	33
25. Synchron pulsierende Kugeln	35
26. Entgegengesetzt volumänderndes Kugelpaar	37
27. Differentiation nach einer Achse	39
28. Räumliche Kugelfunktionen negativen Grades	41
29. Das Feld des volumändernden Kugelpaares	42

Zweiter Abschnitt.

Eine translatorisch bewegte Kugel mit konstantem oder mit veränderlichem Volumen.

30. Die translatorisch bewegte Kugel	43
31. Die Geschwindigkeitsverteilung im Felde der fortschreitenden Kugel	45
32. Andere Auflösung der Geschwindigkeit	47
33. Aktionsgeschwindigkeit und kinematisches Aktionsmoment . . .	50
34. Solenoidale Darstellung des Feldes der fortschreitenden Kugel . .	50
35. Gleichzeitig volumändernde und fortschreitende Kugel	52
36. Das Feld der gleichzeitig fortschreitenden und volumändernden Kugel	54
37. Oscillierende und pulsierende Kugel	55

Dritter Abschnitt.

Allgemeines über die Bewegung des Kugelsystems und die anschließende Bewegung der Flüssigkeit.

38. Potential des Kugelsystems in der ersten Annäherung	56
39. Abhängigkeit des exakten Potentialausdruckes von den kinematischen Parametern	57
40. Abhängigkeit des Potentials von den geometrischen Parametern . .	58
41. Sichtbare und verborgene Bewegung des Kugelsystems	59

	Seite
42. Vereinfachung des Potentials bei intensiven verborgenen und schwachen sichtbaren Bewegungen	60
43. Mechanik der verborgenen Bewegungen	61
44. Die Mittelwerte der Geschwindigkeiten	62
45. Isochrone Schwingungen	63
46. Synchrone Schwingungen	64
47. Die Stromfelder im Falle synchroner Schwingungen	66
48. Die Verwendung anderer kinematischer Parameter	67
49. Die Bahnen der Flüssigkeitspartikelchen	67
50. Verborgene Massen	69

Vierter Abschnitt.

Untersuchung eines beliebigen Stromes potentieller und solenoidaler Natur.

51. Entwicklung nach räumlichen Kugelfunktionen	70
52. Das Parallelfeld	71
53. Das lineare Deformationsfeld	73
54. Die Geschwindigkeitsverteilung im Deformationsfelde	74
55. Die Stromlinien im Deformationsfelde	75
56. Solenoidale Darstellung des Feldes	77
57. Reciproke Relationen zwischen den Geschwindigkeiten in zwei Punkten des Deformationsfeldes	80
58. Zusammengesetztes Parallel- und Deformationsfeld	81
59. Die Darstellung eines beliebigen Potentialstromes durch eine Entwicklung nach räumlichen Kugelfunktionen	83

Fünfter Abschnitt.

Allgemeinstes Aktionspotential einer Kugel.

60. Definitionseigenschaften der räumlichen Kugelfunktionen	84
61. Korrespondierende räumliche Kugelfunktionen	85
62. Solenoidal und potentiell korrespondierende Kugelfunktionen	87
63. Allgemeinstes Aktionspotential einer Kugel	88
64. Deformationsbewegung der Kugel	89

Sechster Abschnitt.

Allgemeinstes Reaktionspotential einer Kugel. Eine Kugel in einem beliebigen Strome.

65. Allgemeinstes Reaktionspotential einer Kugel	92
66. Zusammensetzung von Aktions- und Reaktionspotential	93
67. Die Kugel unveränderlichen Volumens im Parallelfeld	95
68. Allgemeine Definition der Aktionsgeschwindigkeit und des Aktionsmomentes	96
69. Der Fall, daß die Translationsrichtungen der Kugel und des Feldes zusammenfallen	97

	Seite
70. Solenoidale Darstellung des Feldes	99
71. Volumändernde Kugel im Parallelfelde	102
72. Ruhende oder bewegte Kugel in einem Deformationsfelde	105
73. Eine unter Volumänderung bewegte Kugel in einem beliebigen Einfallsstrome	107

Siebenter Abschnitt.

Das Geschwindigkeitspotential eines Kugelsystems.

74. Methode der successiven Approximation für die Lösung des Problems von n Kugeln	109
75. Allgemeine Bemerkungen über die Potentialreihe	111
76. Das Potential in der Nähe einer bestimmten Kugel	111
77. Entwickelte Form des Potentials in der Nähe einer Kugel	113
78. Verschiedene Grade der Annäherung	114

Dritter Teil.

Einfluß des Flüssigkeitsdruckes auf die Bewegung einer Kugel.

Erster Abschnitt.

Berechnung der Druckkraft gegen eine Kugel.

79. Der Druck	117
80. Die Druckkraft	119
81. Die Kugelflächenfunktionen	119
82. Ein Fundamenteleigenschaft der Kugelflächenfunktion	121
83. Die Berechnung von Integralen über die Oberfläche der Kugel	122
84. Die von dem impulsiven Drucke herrührende Druckkraft	123
85. Ausscheidung wirkungsloser Partialdrucke aus dem relativen Energie- drucke	125
86. Die von dem relativen Energiedrucke herrührende Druckkraft	128
87. Die Druckkraft gegen die Kugel	130
88. Prüfung der erreichten Genauigkeit	131
89. Die Bewegungsgleichungen der Kugel	132

Zweiter Abschnitt.

Induktionskraft und Energiekraft.

90. Teilung der Druckkraft	133
91. Erste Integration der Bewegungsgleichungen der Kugel	134
92. Inducierte und energetische Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Kugel	135
93. Induciertes und energetisches Feld	138
94. Einführung der hydrodynamischen Feldintensität	139
95. Selbstinduktion und Fremdinduktion	142

Dritter Abschnitt.

Die reine Selbstinduktion.

	Seite
96. Bewegung einer Kugel in ursprünglich ruhender Flüssigkeit . . .	144
97. Vergleich der Bewegung der Kugel im leeren Raume und in der Flüssigkeit	146
98. Die Bahn der Kugel	148
99. Das Feld der inducierten Geschwindigkeit, wenn die Kugel kon- stantes Volumen hat	150
100. Einführung der Feldintensität	152
101. Vollständiges Potentialfeld und vollständiges Solenoidalfeld . . .	153
102. Aktionsschicht	155
103. Aktionsintensität und dynamisches Aktionsmoment	157
104. Das Feldintensitätsfeld der volumändernden Kugel mit ruhendem Mittelpunkte	158
105. Das Feldintensitätsfeld der volumändernden und fortschreitenden Kugel	161

Vierter Abschnitt.

Die reine Fremdinduktion im Parallelfeld.

106. Entwickelte Form der fremdinducierenden Kraft	162
107. Kugel veränderlichen Volumens im Parallelfelde	164
108. Vergleich der inducierenden und der inducierten Geschwindigkeit	165
109. Die Bahn der Kugel	166
110. Das Feld der inducierten Geschwindigkeit, wenn die Kugel kon- stantes Volumen hat	167
111. Einführung der Feldintensität	170
112. Vollständiges Potentialfeld und vollständiges Solenoidalfeld . . .	171
113. Inducierte Aktionsschicht und inducierte Aktionsintensität. . . .	175
114. Das Feldintensitätsfeld einer Kugel veränderlichen Volumens im Parallelstrome	176

Fünfter Abschnitt.

Gleichzeitige Selbstinduktion und Fremdinduktion im Parallelfelde.

Anwendung auf die hydrodynamische Energiekraft.

115. Bewegte Kugel veränderlichen Volumens im Parallelstrome . . .	177
116. Vergleich mit der Bewegung der Kugel im leeren Raume und mit der Bewegung eines Flüssigkeitspartikelchens im inducierenden Parallelstrome	178
117. Geschwindigkeits- und Feldintensitätspotentiale für die inducierte Bewegung	179
118. Aktionsschicht, Aktionsintensität und Aktionsmoment	181
119. Anwendung auf die hydrodynamische Energiekraft	183
120. Permanente und temporäre Geschwindigkeit der Kugel	183
121. Permanente und temporäre Aktionsmomente	185
122. Permanente und temporäre Energiekraft	186

Sechster Abschnitt.

Allgemeine Sätze über den relativen Einfluß der Induktionskraft und der Energiekraft auf die Bewegung der Kugel.

	Seite
123. Impulsive Bewegung	187
124. Schwingungen mit kleinen Amplituden	188
125. Mittelwert der Induktionskraft im Falle periodischer Bewegungen .	189
126. Mittelwerte der Energiekraft im Falle synchroner Schwingungen .	190
127. Die permanente Energiekraft im Falle synchroner oder nicht synchroner Sinusschwingungen	192

Siebenter Abschnitt.

Einfluß der Energiekraft auf die Bewegung der Kugel.

128. Beziehung der Energiekraft zur Bewegung der Kugel und der Flüssigkeit	196
129. Die von der Volumänderung der Kugel abhängige Energiekraft .	198
130. Die vor der relativen Translationsbewegung der Kugel abhängige Energiekraft	199
131. Regel von dem virtuellen Zuwachs der Konfliktgeschwindigkeit .	201
132. Beispiele der Energiekraft gegen die fortschreitende Kugel in einem Flüssigkeitsströme	202
133. Die permanente Energiekraft	204
134. Die temporäre Energiekraft	206
135. Beziehung der temporären Energiekraft zu der Energieverteilung im Einfallsstrom	207
136. Bewegung leichter und schwerer Kugeln unter dem Einflusse der temporären Energiekraft	208
137. Die Bewegung einer pulsierenden oder oscillierenden Kugel im oscillierenden Einfallsströme	208

Achter Abschnitt.

Drehung der Kugel.

138. Das Drehungsmoment, welches ein volumänderndes Kugelpaar angreift	210
139. Die Möglichkeit der Drehung einer fortschreitenden Kugel . . .	212
140. Inducierendes und energetisches Drehungsmoment	214
141. Verschiedene Formen des energetischen Drehungsmomentes . . .	215
142. Permanentes und temporäres Drehungsmoment	216
143. Die Bewegung der oscillierenden Kugel in damit synchron oscillieren- dem Strome	218

Neunter Abschnitt.

**Darstellung der Energiekraft und des energetischen Drehungs-
momentes durch Summen von Elementarkräften.**

144. Totale Druckkraft und elementare Druckkräfte	219
145. Die Energiekraft gegen die volumändernde und fortschreitende Kugel im Parallelfelde	219

	Seite
146. Energiekraft gegen die fortschreitende Kugel im beliebigen Felde	220
147. Zweite Form der Energiekraft gegen die fortschreitende Kugel . .	222
148. Gleichzeitig volumändernde und fortschreitende Kugel im beliebigen Felde	223
149. Erste Integralform des energetischen Drehungsmomentes	224
150. Zweite Integralform des energetischen Drehungsmomentes	225
151. Diskussion der Elementarkräfte	227

Vierter Teil.

Hydrodynamische Fernkräfte.

Erster Abschnitt.

Ursprung und Entwicklung der Bjerknes'schen Arbeiten.

152. Übergang zur Mechanik des vollständigen Kugelsystems	229
153. Bewegung einer Kugel unveränderlichen Volumens in ursprünglich ruhender Flüssigkeit	230
154. DIRICHLET's Arbeiten	231
155. Ursprung der BJERKNES'schen Arbeiten	232
156. Stellung der Aufgabe von der Bewegung eines Systems von Kugeln mit veränderlichem Volumen.	233

Zweiter Abschnitt.

Klassifikation der im Kugelsystem wirkenden Kräfte.

157. Lokale Kraft und scheinbare Fernkraft.	235
158. Inducierende Fernkraft und energetische Fernkraft	236
159. Grenze der Verwendbarkeit der Kraftformeln	237
160. Permanente und temporäre Fernkraft	239
161. Fernkraft niederer und höherer Ordnung	241

Dritter Abschnitt.

Die lokale Druckkraft und das Trägheitsprinzip.

162. Vergleich des Kugelsystems mit einem System von materiellen Punkten	241
163. Umformung der Bewegungsgleichungen der Kugel	242
164. Das Trägheitsgesetz.	244
165. Das zweite Bewegungsgesetz	245

Vierter Abschnitt.

Unabhängige Wirkung der hydrodynamischen Fernkräfte niederer Ordnung.

166. Vereinfachungen bei beschränkter Genauigkeit der Kraftmessungen	247
167. Die Funktion φ_k und die Operation χ_k	249

	Seite
168. Ungestörte Superposition der hydrodynamischen Fernkräfte niederer Ordnung	251
169. Das Prinzip von dem Parallelogramm der Kräfte als formell-mathematischer und als reell-physikalischer Satz.	253
170. Kraftfunktion der Energiekraft.	254
171. Verschiedene Ausdrücke der inducierenden Fernkraft	255
172. Unabhängigkeit der Wirkung der Kraft von der Bewegung der Angriffspunkte	256

Fünfter Abschnitt.

Das Gegenwirkungsprinzip für die hydrodynamischen Fernkräfte niederer Ordnung.

173. Momentane Wirkung der Kräfte	258
174. Wirkung und Gegenwirkung für die energetische Fernkraft . . .	258
175. Bemerkung zu dem dritten Bewegungsgesetze	259
176. Kräftefunktion für die energetischen Wechselwirkungen im Kugelsysteme	260
177. Nichtgültigkeit des Gegenwirkungsprinzips für die Induktionskraft. .	262
178. Die auf verborgenen Bewegungen beruhende Induktionskraft. . .	263
179. Die auf sichtbaren Bewegungen beruhende Induktionskraft . . .	264
180. Das Gegenwirkungsprinzip und die sichtbaren Bewegungen des Kugelsystems	266
181. Unabhängigkeit der Kraft von den progressiven Geschwindigkeiten beider wirkenden Kugeln	266

Sechster Abschnitt.

Weitere allgemeine Eigenschaften der hydrodynamischen Fernkräfte niederer Ordnung.

182. Das Prinzip von der Erhaltung der Energie in der rationellen Mechanik.	267
183. Die konservative Natur der hydrodynamischen Fernkräfte . . .	268
184. Eigenschaft der Kräftefunktionen	269
185. Abhängigkeit der Kraft von den Volumina der Körper	270
186. Zusammenfassung der gefundenen Resultate	271
187. HERTZ' Mechanik	272
188. Verschiedenartigkeit der erreichten Resultate	273

Siebenter Abschnitt.

Verifikation der erhaltenen Resultate mit Hilfe der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen.

189. Auffassung des vollständigen Systems der Kugeln und der Flüssigkeit als eines einzigen Mechanismus	274
190. Die Energie einer Kugel	275
191. Transformation des Integrals für die Energie der Flüssigkeit. . .	276

192.	Berechnung des Energieintegrals an der Oberfläche einer Kugel	278
193.	Die Energie der Flüssigkeit in erster und zweiter Annäherung	279
194.	Die Bewegungsgleichungen einer Kugel	280

Achter Abschnitt.

Die permanenten Energiekräfte zwischen pulsierenden und oscillierenden Kugeln.

195.	Kräftefunktion der permanenten Energiekraft für zwei Kugeln	282
196.	Die Wechselwirkung zwischen pulsierenden Kugeln	283
197.	Die Kräftefunktion für die Wechselwirkung zwischen einer pulsierenden und einer oscillierenden Kugel	285
198.	Die Kraftwirkungen zwischen pulsierender und oscillierender Kugel	287
199.	Kräftefunktion für die Wechselwirkung zweier oscillierenden Kugel	289
200.	Anziehung und Abstossung zwischen oscillierenden Kugeln	291
201.	Verschiebungen und Drehungen der oscillierenden Kugeln	293
202.	Analogien mit den elektrischen und magnetischen Fernkräften	296

Neunter Abschnitt.

Hydrodynamische Fernkräfte höherer Ordnung. Temporäre Wechselwirkungen zwischen zwei Kugeln.

203.	Grenze der Brauchbarkeit unserer Formeln	299
204.	Inducierende Wirkung einer pulsierenden Kugel auf eine neutrale	300
205.	Kräftefunktion der energetischen Wechselwirkung zwischen einer pulsierenden und einer neutralen Kugel	301
206.	Inducierende Wirkung einer oscillierenden Kugel auf eine neutrale	303
207.	Kräftefunktion der energetischen Wechselwirkung zwischen einer oscillierenden und einer neutralen Kugel	304
208.	Einfachste Formen der Kräftefunktionen und der Kräftekomponenten	307
209.	Gleichzeitige permanente und temporäre Kräfte zwischen zwei pulsierenden Kugeln	309

Zehnter Abschnitt.

Die nicht unabhängige Wirkung der hydrodynamischen Fernkräfte höherer Ordnung.

210.	Zu den allgemeinen Eigenschaften der temporären Fernkräfte	312
211.	Die Energie im Stromfelde zweier pulsierender Kugeln	314
212.	Einzelkräfte und ergänzende Kraft	315
213.	Beispiele der Zusammensetzung temporärer Kräfte	317

Elfter Abschnitt.

Hydrodynamische Fernkräfte höherer Ordnung. Temporäre Wechselwirkungen zwischen neutralen Kugeln in permanent-oscillierendem Strome.

214.	Zwei neutrale Kugeln in einem Parallelstrome	321
215.	Die Wechselwirkung der beiden Kugeln	323

	Seite
216. Ein System von beliebig vielen neutralen Kugeln gleicher Größe und Dichte im oscillierenden Strome	324
217. Analogie der temporären hydrodynamischen Fernkräfte zu den temporären elektrischen und magnetischen Fernkräften	326
218. Schlussbetrachtungen über die hydrodynamischen Fernkräfte . . .	327

Zwölfter Abschnitt.

Zur geschichtlichen Entwicklung der Theorie der hydrodynamischen Fernkräfte.

219. Frühere Zerlegung der hydrodynamischen Fernkräfte	329
220. Folgen der früheren Zerlegung der hydrodynamischen Fernkräfte .	330
221. Die rein hydrodynamische Methode und die Methode des HAMILTON'schen Prinzips zur Ableitung der hydrodynamischen Druckkraft	334
222. Entwicklung der Untersuchungen nach 1875	336

Einleitung.

Bei Beurteilung der Versuche, die uns umgebende physische Welt zu erforschen, muß man stets die beschränkte Natur unserer Sinneswahrnehmungen berücksichtigen. Erscheinungen, welche für unsere Empfindungen getrennt auftreten, wie beispielsweise die Lichtstrahlen und die Wärmestrahlen, können sich bei näherer Untersuchung auf eine und dieselbe physikalische Erscheinung reducirten. Was wir subjektiv als Schall empfinden, läßt sich objektiv auf kleine Bewegungen träger Massen zurückführen, und zwar nehmen die Beispiele dieser Art mit dem Fortschreiten der Wissenschaft immer mehr an Zahl zu.

Eine Zusammenstellung solcher Thatfachen ist wohl geeignet, den Eindruck zu hinterlassen, daß die physische Welt ein zusammenhängendes Ganzes bildet, wovon nur ganz einzelne weit voneinander getrennte Gebiete für uns durch unmittelbare Wahrnehmungen zugänglich sind. Weiter scheinen diese Thatfachen darauf hinzudeuten, daß dieses zusammenhängende Ganze eine einheitliche Konstruktion hat, während die eigentümliche Natur unserer Empfindungen daran schuld ist, daß wir Erscheinungen wesentlich derselben Natur getrennt, bald als Schall, bald als Licht, bald als Wärme, auffassen. Wir können es als die Aufgabe der Physik bezeichnen, durch das Studium der einzelnen und getrennt für uns zugänglichen Erscheinungen ein Bild der zusammenhängenden dahinterliegenden Erscheinungswelt zu konstruieren.

Für die Lösung dieser Aufgabe sind offenbar vergleichende Studien der scheinbar getrennten Erscheinungsreihen von der größten Bedeutung. Die Methode wird genau dieselbe, wie diejenige der vergleichenden Sprachwissenschaft oder der vergleichenden Anatomie sein: Die sich immer mehr anhäufende Summe von Ähnlichkeiten zwingt uns zu Schlüssen über den genetischen Zusammenhang der

vergleichenen Gebiete, welcher, wenn die Umstände günstig sind, durch neue Funde auch direkt bestätigt werden kann. Um nur ein einziges Beispiel zu erwähnen: die rein optischen Untersuchungen von FRESNEL und seinen Nachfolgern und die rein elektrischen Untersuchungen von MAXWELL und HERTZ haben zu einer solchen Reihe von Ähnlichkeiten zwischen den optischen und einer gewissen Klasse von elektrischen Erscheinungen geführt, daß man gezwungen worden ist, auf einen tieferen Zusammenhang derselben zu schließen, und die optischen Erscheinungen in die mehr umfassende Klasse der elektrischen Vorgänge einzureihen.

Bei der Erforschung der Beziehungen zwischen den scheinbar getrennten Teilen der Physik richtet sich die Aufmerksamkeit von selbst stark auf diejenigen Beziehungen, welche sie alle zu einem besonderen Teile der Physik, nämlich zu der Mechanik haben.

Die Ursache ist zunächst eine objektive, weil nämlich alle uns bekannten physikalischen Erscheinungen in intimer Weise mit mechanischen Vorgängen verbunden sind, und weil diese begleitenden mechanischen Vorgänge in vielen Fällen die besten oder die einzigen Hilfsmittel für die rein physischen Forschungen bilden. Wir brauchen nur daran zu erinnern, wie ein die Erwärmung der Körper begleitender mechanischer Vorgang, nämlich die Ausdehnung, zu der Konstruktion des Fundamentalinstrumentes für alle thermischen Untersuchungen geführt hat, während unser unmittelbarer Sinn für Wärme nicht mehr verwendet wird. Oder auch daran, daß die Gesamtheit unserer Kenntnis von den elektrischen und magnetischen Erscheinungen durch die begleitenden Anziehungen und Abstosungen und mit Hilfe der auf diese mechanischen Vorgänge begründeten Meßinstrumente gewonnen ist.

Die Ursache ist aber auch eine subjektive. Denn in der gesamten Reihe der physischen Erscheinungen giebt es keine, mit welchen wir so innig vertraut sind, wie mit den mechanischen. Jedes Individuum der Menschheit ist im Besitze einer instinktiven Kenntnis der fundamentalen mechanischen Wahrheiten, welche durch ununterbrochen fortgesetzte Erfahrung von Geburt an erworben ist. Lange ehe sie Gegenstand der Reflexion bilden, sind diese Erfahrungen von Muskeln und Nerven aufgenommen, und werden bei jeder körperlichen Thätigkeit unaufhörlich benutzt. Zu dieser subjektiven Vertrautheit kommt noch, daß wir das Vermögen haben, uns zu diesen Erscheinungen mehr objektiv zu stellen als zu allen anderen physikalischen, und zwar aus dem Grunde, daß wir sie gleichzeitig mit mehreren unserer Sinne wahrnehmen und kontrollieren können.

Die subjektive Bedeutung, welche es für den Forscher haben muß, die ferner stehenden physischen Erscheinungen mit den mechanischen in Verbindung zu bringen und diese Verbindungen auszunutzen, ist deshalb unmittelbar klar. Instinktiv ist dieses schon seit den ersten Anfängen des physikalischen oder des naturphilosophischen Denkens erkannt worden. Immer hat man nach mechanischen Vorstellungen gegriffen, nicht nur um einzelne physikalische Erscheinungen zu erklären, sondern auch um nach dem Beispiele von DEMOKRIT oder DESCARTES vollständige Weltmechanismen zu konstruieren.

Diese außerordentlichen Phantasieleistungen sind vorzüglich geeignet, zu zeigen, in welchem Maße wir die mechanischen Vorstellungen besser beherrschen, als alle anderen rein physikalischen. Sie zeigen aber auch eine gewisse Gefahr, nämlich die Gefahr, daß die unkontrollierte Phantasie vollständig die Leitung übernimmt, was auch oft geschehen ist, nicht nur im ersten Entwicklungsstadium der naiven Naturphilosophie, sondern auch, nachdem sich die exakten Forschungsmethoden entwickelt haben.

Die Möglichkeit solcher Fehlgriffe darf aber nicht zur Folge haben, daß wir es aufgeben, unsere außerordentlichen Fähigkeiten im mechanischen Denken auszunutzen. Daß man eben durch Ausnutzung dieser Fähigkeiten den besten und vielleicht den einzigen für uns möglichen Weg einschlägt, um uns ein geistiges Bild der gesamten zusammenhängenden physikalischen Erscheinungswelt zu konstruieren, ist der erste leitende Gedanke für C. A. BJERKNES bei seinen hydrodynamischen Untersuchungen gewesen, nur mit der Ergänzung, daß man dabei, wie überhaupt in der Naturwissenschaft, ausschließlich exakte Forschungsmethoden zur Verwendung bringen darf. Die Methode muß wieder genau diejenige der vergleichenden Anatomie oder der vergleichenden Sprachwissenschaft sein: systematisches Aufsuchen von Thatsachen aus den beiden getrennten Erscheinungsreihen, welche den vermuteten Zusammenhang beweisen oder auch widerlegen können. Bei der Aufsuchung der besonderen Probleme oder der besonderen Forschungsgebiete, durch deren Durcharbeitung man solche Thatsachen zu finden hofft, muß man der Phantasie vollkommene Freiheit lassen. Wenn aber einmal das Problem gestellt oder das Forschungsgebiet gefunden ist, darf die Phantasie nicht mehr die Leitung haben, sondern es dürfen, wie gesagt, nur exakte Methoden zur Verwendung kommen.

Die Frage von einer möglichen Reduktion der physischen Erscheinungen auf mechanische Vorgänge führt von selbst zu einer genaueren Analyse der mechanischen Vorgänge an sich. Dabei begegnen wir aber sofort wieder Fällen, wo die Erscheinungen für unsere unmittelbaren Beobachtungen verschiedenartig auftreten, wo wir aber wieder mit Rücksicht auf die Beschränktheit unserer Wahrnehmungen berechtigt sind, eine Einheitlichkeit zu vermuten.

Es ist empirisch festgestellt, daß die Bewegungsänderungen, welche ein Körper erleidet, immer von einem anderen Körper herühren. Dieser zweite Körper kann aber auf zwei scheinbar ganz verschiedene Weisen diese Bewegungsänderungen verursachen: in einem Falle findet eine unmittelbare Berührung der beiden Körper statt; im anderen Falle sind sie voneinander vollständig getrennt, so daß eine Wirkung in die Ferne vorliegt. Wir müssen aber zugeben, daß die Verschiedenartigkeit der Erscheinungen auf einer Täuschung beruhen kann. Es ist möglich, daß unter den scheinbar getrennten Körpern für uns verborgene materielle Verbindungen bestehen, so daß die Fernkraft in der That auf einer Reihenfolge von verborgenen Berührungswirkungen beruht. Es ist aber auch umgekehrt möglich, daß die Berührung der Körper nur eine scheinbare ist, so daß die Berührungskräfte als Fernwirkungen über sehr kleine Abstände erklärt werden müssen.

Wenn wir nach natürlichem Instinkt zwischen diesen beiden Möglichkeiten wählen sollen, so ist das Resultat der Wahl nicht zweifelhaft. Genau wie wir die physischen Erscheinungen auf die mechanischen zu reducieren suchen und nicht umgekehrt, ziehen wir es vor, die Fernkräfte auf Berührungswirkungen zu reducieren. Die subjektive Ursache dürfte wieder dieselbe sein: Die Berührungskräfte gehören entschieden unserem Vorrat an instinktiven mechanischen Vorstellungen an, während dies dagegen ebenso entschieden mit den Fernkräften nicht der Fall ist. Die Berührungskräfte lernen wir bei jeder körperlichen Thätigkeit kennen. Eine ähnliche Vertrautheit besitzen wir aber nur mit zwei isolierten Wirkungen der Fernkräfte, nämlich mit dem Gewichte der Körper und ihrer Tendenz zum Fallen, und erst durch Studium haben wir uns eine neue Auffassung dieser beiden Erscheinungen als Fernkraftwirkungen angeeignet. Historisch ist die Zurückführung derselben auf die Wirkung einer Kraft eine Leistung GALILEI's. Vor ihm verstand man unter Kräften nur Berührungskräfte oder Drucke. Die weitere Zurückführung der GALILEI'schen Kraft auf eine Fernwirkung der Materie war das Resultat der NEWTON'schen Entdeckung. Der Gedanke an eine

mögliche Reduktion der Fernkräfte auf Berührungskräfte ist in der That auch in demselben Augenblick entstanden, als die Fernwirkung als Erscheinung entdeckt wurde. Dieses geht unmittelbar aus NEWTON's vorsichtigen Reservationen bei der Formulierung der Fernwirkungsgesetze hervor. Direkte Versuche, diese Reduktion durchzuführen, wurden auch von einer Reihe von Physikern aus der gleichzeitigen und nächstfolgenden Generation gemacht, wobei noch der greise HUYGHENS den Anfang gemacht hat. Das Mislingen sämtlicher derartiger Versuche brachte aber allmählich die ganze Richtung in Miskredit, und dieser Umstand hatte nicht nur das Aufgeben dieser Versuche, zu deren Gelingen die Voraussetzungen fehlten, sondern einen allgemeinen Übergang zu dem entgegengesetzten Standpunkte zur Folge, wonach die Fernkräfte als die primären und fundamentalen Kräfte der Natur aufgefaßt wurden, auf welche die Berührungskräfte reduciert werden mußten. Nur ein einziger Forscher ersten Ranges, EULER, hat es gewagt noch in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts für die älteren Ansichten energisch einzutreten.

Die Wirkung dieses Umschlages in der Auffassung der mechanischen Erscheinungen zeigte sich bald in allen Gebieten der Physik. Die ältere kinetische Weltanschauung wurde durch die neue dynamische ersetzt. An Stelle der bewegten, einander berührenden oder mit einander kollidierenden materiellen Gebilde, aus welchen DEMOKRIT oder DESCARTES ihre Weltmechanismen konstruierten, traten jetzt fernwirkende Atome, die nie miteinander in Berührung kommen durften, und die sogar als bloße geometrische Punkte aufgefaßt wurden.

Die geschichtliche Entwicklung der Physik hatte zur Folge, daß diese Auffassungen außerordentlich tiefe Spuren hinterließen. Denn eben zu der Zeit, wo die Fernwirkungslehre in mehr oder weniger konsequenter Durchführung vollständig das physikalische Denken beherrschte, war es, daß die vielen neuen Zweige der Physik emporblühten, um alle von Anfang an durch diese Lehre ihre Prägung zu erhalten. Die ganze theoretische Physik des neunzehnten Jahrhunderts hat sich deshalb als ein auf Fernwirkungsvorstellungen aufgeführtes Lehrgebäude entwickelt.

Die Tendenz zum Zurückgreifen auf die uns instinktiv vertrauten Vorstellungen hat aber tiefe Wurzeln. Zum besten Beleg hierfür dient vielleicht der Umstand, daß zu einer Zeit, wo die Fernwirkungslehre eine durch Generationen geprüfte Grundlage der ganzen Physik bildete, und immer noch von Sieg zu Sieg weiter fortzuschreiten schien, doch die Forderung nach der Rückkehr zu den alten Vorstellungen entstehen konnte, um Untersuchungen zu

inspirieren, die in einer Reihe von einzelnen Gebieten eine allgemeine Rückkehr von dynamischen zu kinetischen Anschauungen herbeigeführt haben.

Die Ansicht, daß die Fernwirkungsvorstellung, wie nützlich sie auch als Hilfsvorstellung sein mag zur Beschreibung gewisser Seiten der Naturerscheinungen, doch nicht als letztes Fundament zu dienen geeignet ist, sondern daß man versuchen muß, auf die uns im tieferen Sinne vertrauten Berührungskräfte zurückzugreifen, ist nun der zweite leitende Gedanke bei den hydrodynamischen Untersuchungen von C. A. BJERKNES gewesen. Aber ebensowenig hier, wie bei der Frage von der möglichen mechanischen Natur der physischen Erscheinungen, dürfen wir mit der Aufstellung eines Postulates anfangen, sondern wieder nur nach exakten Forschungsmethoden eine Einsammlung von Thatsachen versuchen, durch welche wir allmählich zur Klarheit kommen können, ob eine Reduktion der Fernkräfte auf Berührungswirkungen möglich ist oder nicht, und ob die Erscheinungen selbst eine solche Reduktion fordern oder nicht. Die Phantasie darf wieder nur bei der Aufsuchung der Probleme oder bei der versuchsweisen Deutung der beobachteten Erscheinungen eine Rolle spielen, während sich nachher alles auf exakte Forschungen reducieren muß.

Die Forschungen können auf physikalischem oder auf mechanischem Boden ausgeführt werden. Auf physikalischem Boden haben beispielsweise die von FARADAY-MAXWELL'schem Geiste inspirierten HERTZ'schen Versuche Thatsachen zu Tage gefördert, die jetzt allgemein so gedeutet werden, daß auf dem Gebiete der Elektrizität und des Magnetismus die Fernwirkungslehre nicht mehr als Fundamentalvorstellung brauchbar ist. Andererseits hat HERTZ vom mechanischen Standpunkte aus eine Thatsache gebracht, die für die Beurteilung der Frage von der größten Bedeutung ist. Er hat nämlich durch seine Mechanik zum ersten Male gezeigt, daß man bei dem formellen Aufbau dieser Wissenschaft die Fernwirkungsvorstellung entbehren kann, wodurch gleichzeitig eine Form der Mechanik zu Wege gebracht ist, welche besser als Grundlage der kinetischen Erklärung für physikalische Erscheinungen dienen kann.

Die hydrodynamischen Untersuchungen von C. A. BJERKNES sind insofern besonders mit HERTZ' Mechanik verwandt, als sie das Ziel haben, auf mechanischem Boden Thatsachen einzusammeln, die zur Beurteilung der Hilfsmittel der Mechanik von Bedeutung sind, wenn es sich darum handelt, Fernkräfte womöglich auf verborgene Be-

rührungswirkungen und physischen Erscheinungen auf verborgene mechanische Vorgänge zurückzuführen. Zu Aufgaben, bei deren Lösung man die Auffindung solcher Thatsachen zu erwarten hat, kann man durch verschiedene einfache Überlegungen kommen.

Zwecks Reduktion der Fernkräfte auf Berührungswirkungen hat man im allgemeinen zu der Annahme eines raumerfüllenden Mediums gegriffen. Als den ersten Grundbestandteil des Mechanismus, welchen wir studieren wollen, nehmen wir deshalb auch ein solches Medium an. Um zuerst das möglichst einfache zu versuchen, treffen wir die Wahl, dieses Medium mit möglichst einfachen mechanischen Eigenschaften auszustatten: es soll die Eigenschaften einer homogenen, inkompressiblen, reibungslosen Flüssigkeit haben.

In diese Flüssigkeit denken wir uns ein System von beliebig vielen Körpern eingetaucht. Um analytische Einfachheit zu erreichen, nehmen wir an, daß alle Körper kugelförmig seien, und daß sie zugleich gegenseitige Entfernungen haben, die im Verhältnis zu ihren Radien groß sind. Dabei können wir jedoch sofort von der Rotation als einer in reibungsloser Flüssigkeit einflußlosen Bewegung absehen, und die allgemeinste explicite zu betrachtende Bewegung jeder Kugel wird aus einer Translation in Verbindung mit einer Expansions- oder Kontraktionsbewegung bestehen.

Unsere erste Aufgabe wird dann das Studium der Bewegung dieses Mechanismus von rein mechanischem Standpunkt aus sein, zunächst ohne jede Rücksicht auf die sich vielleicht ergebenden Analogien zu anderen Naturerscheinungen.

Erst nachdem diese Aufgabe in genügender Vollständigkeit gelöst ist, dürfen wir uns in Bezug auf diesen Mechanismus in eine ähnliche Stellung denken, wie wir sie thatsächlich wegen der Beschränktheit unserer Wahrnehmungen zu allen uns umgebenden Naturerscheinungen einnehmen, so daß wir nur getrennte Einzelheiten direkt wahrnehmen können, während uns der ganze Zusammenhang verborgen bleibt. Wir können uns dabei verschiedene Stadien der Beschränktheit unserer Beobachtungen denken, deren das erste das folgende sein mag:

Wir können uns vorstellen, daß wir zwar die Kugeln, nicht aber die Flüssigkeit wahrnehmen können. Die Einflüsse, welche von den Kugeln durch Vermittelung des Mediums gegenseitig aufeinander ausgeübt werden, werden dann als die Wirkungen von Fernkräften erscheinen, und wir können dann somit ein vergleichendes Studium dieser scheinbaren Fernkräfte hydrodynamischen Ursprungs mit den Fernkräften der Natur vornehmen.

Andererseits können wir, sofern die allgemeinen Ergebnisse der Untersuchungen dazu einladen, uns in eine solche Lage gegenüber unserem Mechanismus denken, wie wir sie thatsächlich zu dem Erscheinungskomplex beispielsweise der Elektrizität und des Magnetismus einnehmen, nämlich dafs wir nur gewisse begleitende, vielleicht an sich unwesentliche mechanische Erscheinungen direkt wahrnehmen können, und dafs diese Erscheinungen unsere einzigen Hilfsmittel zum Studium des verborgenen Phänomenkomplexes bilden. Unter diesen Voraussetzungen können wir dann ebenfalls ein vergleichendes Studium der betreffenden mechanischen und physikalischen Erscheinungen vornehmen.

Der allgemeine Plan der Untersuchungen, und die besondere Aufgabe, welche nach diesem Plane gelöst werden soll, ist somit gegeben. Wie C. A. BJERKNES zur Stellung dieser Aufgabe geführt wurde, und wie sich die Untersuchungen historisch entwickelt haben, werden wir später an geeigneten Stellen erläutern. Nur so viel sei jetzt schon bemerkt, dafs, wenn wir hier mehrmals auf die FARADAY-MAXWELL-HERTZ'schen Forschungen angespielt haben, dieses nur wegen der im allgemeinen verwandten Ziele, und nicht mit Rücksicht auf eine historische Abhängigkeit geschehen ist. C. A. BJERKNES hatte die erste Idee zu seinen Untersuchungen schon zu einer Zeit gefafst, wo FARADAY's Anschauungen noch nicht den geringsten Einfluß auf die allgemeinen Vorstellungen der Physiker ausgeübt hatten, und wo MAXWELL's bahnbrechende Untersuchungen noch nicht angefangen waren. Sie haben sich auch später von denselben unbeeinflusst entwickelt und lagen schon längst in allen Grundzügen fertig abgeschlossen vor, ehe die HERTZ'schen Versuche zu dem definitiven Siege der von FARADAY ausgegangenen Ideen führten, und ehe HERTZ seine Mechanik schuf.

Erster Teil.

Voraussetzungen allgemeiner Natur.

Erster Abschnitt.

Aus der Theorie der Vektorfelder.

1. Vektorgröße und Vektorfeld. — Bei der Lösung der hydrodynamischen Aufgabe, welche wir uns gestellt haben, sowie bei den weiteren durch die gefundene Lösung veranlaßten Diskussionen, werden Vektorgrößen der verschiedensten physikalischen Natur zur Verwendung kommen. Teils werden wir Vektorgrößen begegnen, die isoliert auftreten, wie beispielsweise die mechanische Kraft, welche an einem materiellen Punkte angreift. Hauptsächlich werden wir aber mit Vektorgrößen zu thun haben, welche den Bewegungszustand oder irgend einen anderen physikalischen Zustand eines materiellen Kontinuums beschreiben. In diesem Falle haben wir in jedem Punkte des Kontinuums eine Vektorgröße zu betrachten, und die Untersuchung der räumlichen Verteilung oder des Feldes der Vektorgröße wird eine Hauptrolle spielen.

Die Hauptsätze der Theorie der Vektorfelder wird man in den meisten Darstellungen der Hydrodynamik, der Elasticitätslehre, der Potentialtheorie und der Lehre von der Elektrizität und dem Magnetismus dargestellt finden, doch meistens in der Form von Sätzen mit konkretem physikalischen Inhalt. Bei dem Vergleich von Vektorfeldern verschiedener physikalischer Natur ist es aber wichtig, im voraus mit den allgemeinen mathematischen Eigenschaften solcher Felder vertraut zu sein, ohne Rücksicht auf die im besonderen Problem ihnen beigelegte physikalische Bedeutung. Um uns deshalb die getrennte Betrachtung der Vektorfelder von rein mathematischer

und von physikalischer Seite zu erleichtern, werden wir hier einleitungsweise die für uns wichtigsten allgemeinen Prinzipien der Theorie der Vektorfelder als eine rein mathematische Theorie zusammenstellen, während wir doch für die Beweise auf die gewöhnlichen Lehrbücher verweisen.

Wir werden dabei nach den Cartesischen Prinzipien die VektorgröÙe analytisch durch drei Komponenten darstellen, aber uns sonst dem Sprachgebrauche der neueren Vektoranalysis möglichst anschließen, und besonders auf die von allen Koordinatensystemen unabhängigen geometrischen Darstellungen der Vektorgrößen Gewicht legen.

Es sollen dann im Folgenden x, y, z die Koordinaten eines beliebigen Punktes des Raumes bedeuten, bezogen auf drei rechtwinkelige Achsen; u, v, w sollen die Projektionen des Vektors auf die drei Achsen sein. Das ganze Feld des Vektors (u, v, w) ist bekannt, wenn jede der drei Größen u, v, w als eindeutige Funktion der Koordinaten x, y, z gegeben ist, $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$.

2. Vektorlinien, Vektorröhren, Vektorfluß. — Unter einer Vektorlinie verstehen wir eine überall tangentiell zur Richtung des Vektors verlaufende Kurve. Sind u, v, w die Vektorkomponenten, so werden die Gleichungen dieser Kurven durch Integration des Systemes

$$(a) \quad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

gefunden.

Denkt man sich das vollständige System von Vektorkurven gezeichnet, und in jedem Punkte der Kurven infinitesimale Strecken abgetragen, deren Länge jeweils dem Zahlenwerte des Vektors proportional ist, so erhält man eine vollständige geometrische Darstellung des Vektorfeldes.

Ist n die Normale einer Fläche σ , und sind $\cos n, x$, $\cos n, y$, $\cos n, z$ die Richtungs cosinus dieser Normale, so nennen wir das Flächenintegral der längs dieser Normale fallenden Komponente des Vektors

$$(b) \quad F = \int (u \cos n, x + v \cos n, y + w \cos n, z) d\sigma$$

den Vektorfluß durch die Fläche σ . Ist die Fläche geschlossen, so soll n die nach außen gerichtete Normale bedeuten, und der Wert des Integrales (b) über die ganze Fläche berechnet soll der Ausfluß aus der Fläche heißen.

Eine aus Vektorkurven erzeugte Röhre heißt eine Vektorröhre. Der Mantel einer solchen Röhre wird nicht durchflossen, der Vektorfluß durchsetzt nur die Querschnittsflächen. Zeichnet man ein System von hinlänglich dünnen Vektorröhren, und giebt den Wert des Vektorflusses in allen Querschnitten aller Röhren an, so erhält man ebenfalls eine vollständige Darstellung des Vektorfeldes.

3. Die Vektorkomponenten an Unstetigkeitsflächen. — Der Vektor soll nach unseren Voraussetzungen überall im Feld endliche Werte haben, und im allgemeinen auch von Punkt zu Punkt stetig veränderlich sein.

An gewissen Grenzflächen, die wir immer geschlossen voraussetzen, und die also das Vektorfeld in zwei getrennte Partialfelder zerlegen, dürfen doch Unstetigkeiten vorkommen. Den Vektor innerhalb der Grenzflächen werden wir durch (U, V, W) bezeichnen, während wir im äußeren Raum das (u, v, w) beibehalten. An solchen Flächen ist die Betrachtung derjenigen Vektorkomponenten, welche entweder längs der Normale oder in die Tangentialebene fallen, von besonderer Wichtigkeit.

Die Ausdrücke

$$(a) \quad \begin{aligned} (u, v, w)_n &= u \cos n, x + v \cos n, y + w \cos n, z \\ (U, V, W)_n &= U \cos n, x + V \cos n, y + W \cos n, z \end{aligned}$$

stellen die Komponenten dar, welche die Vektoren des äußeren beziehungsweise des inneren Feldes längs der Normalen der Grenzfläche haben.

Projizieren wir diese normalen Vektorkomponenten auf die Koordinatenachsen, und ziehen diese Projektionen von den entsprechenden Projektionen des totalen Vektors ab, so erhalten wir Vektorgrößen (u_τ, v_τ, w_τ) und (U_τ, V_τ, W_τ) , welche die Komponenten

$$(b) \quad \begin{aligned} u_\tau &= u - (u, v, w)_n \cos n, x & U_\tau &= U - (U, V, W)_n \cos n, x \\ v_\tau &= v - (u, v, w)_n \cos n, y & V_\tau &= V - (U, V, W)_n \cos n, y \\ w_\tau &= w - (u, v, w)_n \cos n, z & W_\tau &= W - (U, V, W)_n \cos n, z \end{aligned}$$

haben, und welche die tangentiellen Vektorkomponenten der beiden Partialfelder an der Grenzfläche darstellen.

4. **Divergenz und Wirbel eines Vektors.** — Aus einem gegebenen Vektor (u, v, w) können wir durch Differentiationen nach den Koordinaten die skaläre GröÙe

$$(a) \quad e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

und die VektorgröÙe

$$(b) \quad \xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

ableiten. Die skaläre GröÙe e heiÙt im Sprachgebrauch der Vektoranalysis die Divergenz des Vektors (u, v, w) , während man den abgeleiteten Vektor (ξ, η, ζ) als den Wirbel des gegebenen Vektors bezeichnet.

In den Punkten einer Unstetigkeitsfläche verlieren diese Definitionen ihre Bedeutung. Wir können aber dort verwandte abgeleitete GröÙen bilden. Die Differenz der Normalkomponenten des Vektors an beiden Seiten der Grenzfläche, das heiÙt die skaläre GröÙe

$$(a') \quad e' = (u, v, w)_n - (U, V, W)_n$$

werden wir die Flächendivergenz an der Diskontinuitätsfläche nennen. In ähnlicher Weise definieren die tangentiellen Vektorkomponenten einen in die Grenzfläche fallenden Vektor (ξ', η', ζ') , dessen rechtwinklige Komponenten durch die Differenzen

$$(b') \quad \xi' = u_\tau - U_\tau, \quad \eta' = v_\tau - V_\tau, \quad \zeta' = w_\tau - W_\tau$$

gegeben sind, und welchen wir den Flächenwirbel oder Gleitungswirbel an der Grenzfläche nennen werden.

Von der Verwandtschaft der Flächendivergenz e' mit der kubischen Divergenz e und des Flächenwirbels (ξ', η', ζ') mit dem kubischen Wirbel (ξ, η, ζ) kann man sich durch einen einfachen Grenzübergang überzeugen. Man denkt sich die Diskontinuitätsfläche erst durch eine körperliche Übergangsschicht ersetzt, wo der Vektor allerdings schnell, aber doch stetig seine GröÙe und Richtung verändert. In dieser Schicht haben die Ableitungen nach den Koordinaten, und besonders auch die Divergenz und der Wirbel gröÙe, aber endliche Werte. Man läÙt dann die Dicke der Übergangsschicht verschwinden, während man gleichzeitig die Werte der Divergenz und des Wirbels umgekehrt proportional der Schichtdicke anwachsen läÙt. Aus den dabei endlich bleibenden Produkten aus

Divergenz e und Schichtdicke, beziehungsweise aus Wirbel (ξ, η, ζ) und Schichtdicke erhält man die neuen Begriffe der Flächendivergenz e' und des Flächenwirbels (ξ', η', ζ') .

Was sonst die durch Gleichung (a) definierte kubische Divergenz e betrifft, so kann sie auch definiert werden als der auf die Volumeinheit bezogene Ausfluß (2) durch die Oberfläche eines Volumenelementes. Und ähnlich kann die Flächendivergenz e' als der auf die Flächeneinheit bezogene Ausfluß aus einem Flächenelement der Diskontinuitätsfläche definiert werden. Dieser Ausfluß aus der Diskontinuitätsfläche ist mit dem plötzlichen Zuwachs identisch, welchen der Vektorfluß beim Durchsetzen dieser Fläche erhält.

5. Solenoidales Vektorfeld. — Nehmen wir an, daß die Komponenten des Vektors (u, v, w) innerhalb eines gewissen Raumes der Bedingung

$$(a) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

genügen. Dann ist der Ausfluß aus jedem Volumelement und folglich auch aus jeder beliebigen endlichen geschlossenen Fläche in diesem Raum gleich Null. Hieraus folgert man weiter, daß in allen Vektorröhren der Vektorfluß durch alle Querschnitte gleiche Werte haben wird. Jede Röhre hat also in diesem Fall einen eindeutig bestimmten Vektorfluß, und man braucht zur Darstellung des Feldes nur hinlänglich viele Röhren mit angegebenem Wert des Flusses zu zeichnen. Am zweckmäßigsten wählt man dann Vektorröhren, für welche der Vektorfluß gleich Eins ist, und um diese Röhren hinlänglich dünn zu erhalten, wählt man zur Darstellung des Vektors eine Einheit hinlänglich kleiner Größenordnung. Die entsprechenden infinitesimalen Einheitsröhrchen nennen wir Solenoide. Sind die Solenoide des Feldes gezeichnet, so kann man überall den Wert des Vektors finden, da derselbe längs der Solenoidachse gerichtet und gleich dem reciproken Querschnitt des Solenoids ist. Jede durch Solenoide darstellbare Vektorgröße heißt eine solenoidale Vektorgröße, und die Bedingungsgleichung (a) die Solenoidalbedingung.

6. Potentielles oder lamelläres Vektorfeld. — Betrachten wir jetzt eine Vektorgröße, deren Komponenten die Bedingungen

$$(a) \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

erfüllen. Das Feld ist dann wirbelfrei. Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, haben die Vektorkomponenten die Eigenschaft, daß sie sich als partielle Ableitungen einer Funktion φ darstellen lassen

$$(b) \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Die von den Koordinaten x, y, z abhängige Funktion φ heißt das Potential des Vektors (u, v, w) , und der wirbelfreie Vektor kann auch als eine potentielle Vektorgröße bezeichnet werden. Substituiert man (b) in der Gleichung 4(a), so erhält man die Divergenz des Feldes durch das Potential φ ausgedrückt

$$(c) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = e$$

oder mit einer gewöhnlichen abgekürzten Bezeichnung

$$(c') \quad \nabla^2 \varphi = e.$$

Eine Fläche

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.}$$

nennen wir eine Äquipotentialfläche, und den Raum zwischen zwei solchen nahe aneinander verlaufenden Flächen eine äquipotentielle Schicht. Die Vektorkomponenten u, v, w sind dem Richtungskosinus der Normale dieser Fläche proportional, so daß der Vektor in die Normale der äquipotentiellen Fläche fällt. Weiter kann der Vektor selbst

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

geschrieben werden, wenn n die Normale der Äquipotentialfläche ist, und dieser Ausdruck läßt sich in der folgenden Weise deuten: $\partial \varphi$ ist der konstante Unterschied der Potentialwerte der beiden Flächen, welche eine äquipotentielle Schicht begrenzen, ∂n ist die von Ort zu Ort veränderliche Dicke dieser Schicht. Folglich ändert sich der Wert des Vektors umgekehrt proportional der Schichtdicke.

Wählen wir jetzt eine Einheit genügend kleiner Größenordnung, und zeichnen die Äquipotentialflächen für Potentialunterschiede Eins, so daß sie unendlich dünne Äquipotentialschichten oder Lamellen begrenzen. Diese Lamellen geben eine vollständige geometrische Darstellung des Vektorfeldes: der Vektor verläuft längs der Lamellen-

normale und ist gleich der reciproken Dicke der Lamelle. Die wirbelfreien oder potentiellen Vektorfelder können wir deshalb auch lamelläre Vektorfelder nennen.

7. Laplace'sches Vektorfeld. — Schließlich können innerhalb eines gewissen Raumes die Solenoidalbedingung und die Potentialbedingung gleichzeitig erfüllt sein. Die Vektorkomponenten lassen sich dann in der Form 6 (b) mit Hilfe eines Potentials ausdrücken, und dieses Potential erfüllt die LAPLACE'sche Gleichung

$$(a) \quad \nabla^2 \varphi = 0.$$

Zur geometrischen Darstellung dieses Feldes kann man sich mit gleichem Recht der Solenoide oder der Lamellen bedienen.

8. Solenoidale Grenzflächenbedingung. — Kommt im Feld eine Diskontinuitätsfläche vor, so kann es eintreffen, daß in jedem Punkt derselben die Flächendivergenz Null ist, so daß sich die normale Vektorkomponente kontinuierlich durch dieselbe fortsetzt:

$$(a) \quad (u, v, w)_n = (U, V, W)_n.$$

Diese Bedingung kann als ein Spezialfall der allgemeinen Solenoidalbedingung 5 (a) aufgefaßt werden, und wir werden dieselbe deshalb die solenoidale Grenzflächenbedingung nennen. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, wird offenbar die Stromführung einer Vektorröhre keine plötzliche Änderung an der Grenzfläche erleiden.

Gilt die allgemeine Solenoidalbedingung 5 (a) für die Partialfelder außerhalb und innerhalb der Grenzfläche, und ist die solenoidale Grenzflächenbedingung (a) an der Grenzfläche erfüllt, so werden die zwei solenoidalen Partialfelder zusammen ein solenoidales Gesamtfeld bilden.

Sind die zwei Partialfelder potentiell, mit den Potentialen φ und Φ , so läßt sich die Bedingung (a)

$$(b) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

schreiben. Ist die Grenzfläche eine wirkliche Diskontinuitätsfläche, so kann der Wirbel der Fläche nicht gleichzeitig mit der Divergenz verschwinden. Man hat dann zwei durch eine Wirbelfläche getrennte potentielle Partialfelder, die zusammengenommen nicht ein

potentielles Gesamtfeld darstellen können, wohl aber ein solenoidales Gesamtfeld, wenn nämlich die zwei Partialfelder LAPLACE'sche sind.

9. Potentielle oder lamelläre Grenzflächenbedingungen. — An der Diskontinuitätsfläche kann es andererseits eintreffen, daß die Bedingungen

$$(a) \quad u_{\tau} = U_{\tau}, \quad v_{\tau} = V_{\tau}, \quad w_{\tau} = W_{\tau}$$

erfüllt sind. Die beiden Partialfelder grenzen dann mit kontinuierlichen tangentiellen Vektorkomponenten aneinander an.

Ist diese Bedingung erfüllt, und sind die beiden aneinander grenzenden Vektorfelder für sich betrachtet potentiell, so gehen die Lamellen beider Felder kontinuierlich ineinander über. Ist s die Kurvenlänge einer beliebig verlaufenden Kurve in der Grenzfläche, und sind φ und Φ die Potentiale des äußeren und des inneren Partialfeldes, so können die Bedingungen (a) auch

$$(b) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial s}$$

geschrieben werden. Wenn man integriert und die für die Darstellung des Vektorfeldes bedeutungslose Integrationskonstante gleich Null setzt, so wird

$$(c) \quad \varphi = \Phi.$$

Ist also an einer Grenzfläche zwischen zwei Potentialfeldern die Bedingung (a) von der Kontinuität der tangentiellen Vektorkomponenten erfüllt, so können die Potentiale der zwei Felder so gewählt werden, daß sie sich kontinuierlich aneinander schließen (c). Ist umgekehrt die Bedingung (c) von der Kontinuität der Potentiale erfüllt, so folgt durch die Differentiation die Gleichung (b), welche die Kontinuität der tangentiellen Vektorkomponenten ausspricht.

Die Bedingung von der Kontinuität der Tangentialkomponente, welche sich im allgemeinsten Fall durch (a) und in spezielleren Fällen durch (b) oder (c) ausdrückt, wollen wir die potentielle Grenzflächenbedingung nennen. Zwei potentielle Partialfelder, die diese Bedingung erfüllen, bilden ein potentielles Gesamtfeld.

10. Eindeutige Bestimmtheit des Laplace'schen Vektorfeldes durch Grenzflächenbedingungen. — Die fundamentale Bedeutung der oben wiedergegebenen Einteilung der Vektorfelder tritt besonders hervor,

durch die bekannten Sätze über die Bedingungen, welche hinreichend sind, um ein Vektorfeld eindeutig zu bestimmen. Bei der Wiedergabe dieser Sätze setzen wir immer voraus, daß die betrachteten Felder einfach zusammenhängende Räume erfüllen.

Ein LAPLACE'sches Feld innerhalb einer Grenzfläche ist eindeutig gegeben in zwei Fällen:

(A) Wenn die normale Vektorkomponente in jedem Punkte der Grenzfläche gegeben ist.

(B) Wenn die tangentielle Vektorkomponente in jedem Punkte der Grenzfläche gegeben ist.

Anstatt auf den Vektor können die Sätze auf sein Potential bezogen werden. Der erste sagt dann aus, daß das Potential bestimmt ist, von einer für die Darstellung des Vektorfeldes belanglosen additiven Konstanten abgesehen, wenn die Ableitung des Potentials längs der Normale in allen Punkten der Grenzfläche gegeben ist. Die Konstante wird bestimmt, wenn zugleich der Wert des Potentials in einem bestimmten Punkte des Feldes bekannt ist.

Der zweite Satz nimmt ganz entsprechend die Form an, daß das Potential, von der belanglosen Konstanten abgesehen, durch die zur Grenzfläche tangentiellen Ableitungen des Potentials gegeben sind. Die Konstante ist wieder bestimmt durch einen angegebenen Wert des Potentials in einem bestimmten Punkte. Da schließlich die Kenntnis der Werte des Potentials in allen Punkten der Grenzfläche die Kenntnis sowohl der tangentiellen Ableitungen, als des Potentialwertes in einem bestimmten Punkte des Feldes enthält, so folgt die besonders einfache und nützliche Form des Satzes, daß das Potential eindeutig bestimmt ist, wenn sein Wert in allen Punkten der Grenzfläche gegeben ist.

Ist das LAPLACE'sche Feld nach innen begrenzt, nach außen dagegen unbegrenzt, so genügt eine den Bedingungen (A) oder (B) zur eindeutigen Bestimmung des Feldes, wenn man die Bedingung hinzunimmt, daß das Potential oder der Vektor im Unendlichen verschwinden soll. Und zwar soll, wenn R der Radius Vektor ist, welcher von einem Punkte im Endlichen zu dem entfernten Punkte führt, wo wir den Wert des Potentials oder des Vektors betrachten, das Potential wie eine kleine Gröfse von der Ordnung $\frac{1}{R}$, der absolute Wert des Vektors wie eine kleine Gröfse von der Ordnung $\frac{1}{R^2}$ verschwinden, wenn R über alle Grenzen hinauswächst.

11. Eindeutige Bestimmtheit der vollständigen Vektorfelder durch Divergenz und Wirbel. — Das LAPLACE'sche Vektorfeld ist immer entweder nach innen oder nach außen begrenzt. Unter einem vollständigen Vektorfelde werden wir ein Vektorfeld verstehen, welches weder nach innen noch nach außen begrenzt ist, und welches im Unendlichen verschwindet. Ein vollständiges Vektorfeld kann also nicht in seiner ganzen Ausdehnung ein LAPLACE'sches Feld sein, sondern muß notwendig Divergenzen oder Wirbel enthalten, die übrigens kubischer oder flächenhafter Natur sein können.

Ein solches vollständiges Vektorfeld ist eindeutig bestimmt, wenn die Divergenzen und die Wirbel gegeben sind.

Kommen keine Wirbel, sondern nur Divergenzen vor, so ist das Feld ein vollständiges Potentialfeld. Ist die kubische Divergenz e als Funktion der Koordinaten x_1, y_1, z_1 , die Flächendivergenz e' als Funktion der Koordinaten x', y', z' gegeben, und ist $d\tau_1$ ein kubisches Element, $d\sigma'$ ein Flächenelement, so drückt sich das Potential im beliebigen Punkte x, y, z dieses Feldes durch das bekannte Integral

$$(a) \quad \varphi = - \int \frac{e d\tau_1}{4\pi r_1} - \int \frac{e' d\sigma'}{4\pi r'}$$

aus, wo

$$(b) \quad \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} \\ r' &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}. \end{aligned}$$

Die Quadraturen sollen über alle Punkte $x_1, y_1, z_1, x', y', z'$ ausgedehnt werden, wo kubische Divergenz e oder Flächendivergenz e' vorkommt.

Kommt keine kubische Divergenz e , sondern nur Flächendivergenz e' vor, so reduciert sich das Vektorfeld auf zwei aneinander grenzende LAPLACE'sche Felder, welche durch eine mit Flächendivergenz behaftete Diskontinuitätsfläche voneinander getrennt sind. In Formel (a) bleibt dann nur das letzte über die Diskontinuitätsfläche zu berechnende Integral stehen.

Zweiter Abschnitt.

Aus den Prinzipien der Hydrodynamik.

12. Die Euler'sche Fassung der hydrodynamischen Probleme. —

Die allgemeinen Prinzipien der Hydrodynamik werden wir als bekannt voraussetzen, und stellen die Fundamentalgleichungen auf unter Erinnerung an ihre Bedeutung, aber ohne die Ableitungen wiederzugeben.

Wir werden ausschließlich die EULER'sche Darstellungsform der hydrodynamischen Probleme anwenden. Nach derselben kümmern wir uns nicht um die dynamische Geschichte des einzelnen individuellen Flüssigkeitspartikelchens, sondern suchen die räumliche Verteilung der Geschwindigkeit, der Dichte und des Druckes in der Flüssigkeit zu jeder Zeit zu bestimmen. Mit anderen Worten, wir richten unsere Aufmerksamkeit auf das Vektorfeld der Geschwindigkeit und auf die skalären Felder der Dichte und des Druckes. Die Aufgabe ist, die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w , den Druck p und die Dichte q der Flüssigkeit als Funktionen der Koordinaten x, y, z eines beliebigen Raumpunktes und der Zeit t darzustellen. Ist das geschehen, so sind sämtliche erwähnten Vektorfelder und skalären Felder bekannt.

Die Bedingungen, welche zu der Bestimmung dieser Felder dienen, sind teils kinematischer, teils dynamischer Natur. Diese beiden Klassen von Bedingungen werden wir getrennt betrachten.

13. Die kinematischen Bedingungen. — Die Masse der Flüssigkeit erhält sich bei jeder beliebigen Bewegung konstant. Diese Bedingung drückt sich durch die sogenannte Kontinuitätsgleichung aus:

$$(a) \quad \frac{\partial(q u)}{\partial x} + \frac{\partial(q v)}{\partial y} + \frac{\partial(q w)}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial t} = 0.$$

Der erste dreigliedrige Ausdruck ist die Divergenz des Vektors $(q u, q v, q w)$, welche das Produkt der Geschwindigkeit und der Dichte ist. Die Gleichung sagt also unmittelbar aus, daß die zeitliche Abnahme der Dichte im Volumelement, $-\frac{\partial q}{\partial t}$, dem Massenausfluss aus dem Volumelemente gleich ist.

Das Auftreten des Vektors

$$\bar{u} = q u, \quad \bar{v} = q v, \quad \bar{w} = q w$$

in dieser ersten Fundamentalgleichung ist eine erste Ursache, warum es unter Umständen vorteilhaft sein mag, diesen Vektor anstatt der Geschwindigkeit als Fundamentalvektor einzuführen. Derselbe stellt die Bewegungsgröße oder das Moment der Flüssigkeit, auf die Einheit des Volumens bezogen, dar. Wenn wir diesen Vektor später zur Verwendung bringen, werden wir denselben als die hydrodynamische Feldintensität bezeichnen.

Aus der Undurchdringlichkeit der Körper folgt eine der Bedingung (a) verwandte Bedingung, welcher die Flüssigkeit an der Grenzfläche mit fremden Körpern genügen muss. Die Undurchdringlichkeit, ergänzt durch die Bedingung, dass die Flüssigkeit auch nie von den fremden Körpern losgerissen werden soll, erfordert nämlich, dass die Flüssigkeit in der Richtung normal zur Grenzfläche dieselbe Geschwindigkeit haben muss, als der anliegende Oberflächenpunkt des fremden Körpers. An der Grenzfläche erfüllt mit anderen Worten die Geschwindigkeit die solenoidale Grenzflächenbedingung, so dass wir nach 8(a)

$$(b) \quad (u, v, w)_n = (U, V, W)_n$$

schreiben können, wo U, V, W die Geschwindigkeitskomponenten eines Oberflächenpunktes des fremden Körpers bedeuten.

14. Die dynamischen Bedingungen. — Während die aufgestellten kinematischen Bedingungsgleichungen allgemein gültig sind für jede Flüssigkeit oder überhaupt für jedes materielle Kontinuum, welche auch die besonderen physikalischen und dynamischen Eigenschaften sein mögen, können die Bewegungsgleichungen nur nach einer genaueren Festsetzung dieser Eigenschaften aufgestellt werden.

Wir setzen die Flüssigkeit reibungslos oder vollkommen flüssig voraus. X, Y, Z sollen die Komponente der äusseren beschleunigenden Kraft sein, welche die Flüssigkeitspartikelchen angreift. Zwischen dieser beschleunigenden Kraft, der Geschwindigkeit, der Dichte und dem Druck der Flüssigkeit bestehen dann die EULER'schen Gleichungen

$$(a) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen stellen bekanntlich die Beschleunigungskomponenten des bewegten materiellen Flüssigkeitspartikelchens dar. Im letzten Glied rechts kommen die Komponenten der potentiellen Vektorgröße $-\frac{\partial p}{\partial x}$, $-\frac{\partial p}{\partial y}$, $-\frac{\partial p}{\partial z}$, vor. Diese Vektorgröße nennen die Meteorologen den Gradienten. Durch die Dichte q dividiert giebt sie den beschleunigenden Gradienten, welcher die Komponenten

$$-\frac{1}{q} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad -\frac{1}{q} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad -\frac{1}{q} \frac{\partial p}{\partial z}$$

hat, und welcher die von dem Druck herrührende beschleunigende Kraft darstellt. Die Gleichungen sagen also einfach aus, daß die Beschleunigung eines Flüssigkeitspartikelchens der Summe der äußeren beschleunigenden Kraft und des beschleunigenden Gradienten gleich ist.

15. Solenoidalbewegung. — Die vier Bedingungen **13(a)** und **14(a)**, welche in jedem Punkte der Flüssigkeit erfüllt werden müssen, genügen noch nicht zur Bestimmung der fünf Unbekannten u, v, w, p, q . Eine fünfte, von der physikalischen Natur der Flüssigkeit abhängende Relation muß zur Hilfe genommen werden. Meistens wird diese als eine Relation zwischen Dichtigkeit und Druck gewählt.

Wir werden diese Relation möglichst einfach wählen, indem wir die Dichtigkeit q als eine von allen äußeren Einflüssen und außerdem von den Koordinaten und der Zeit unabhängige Konstante annehmen:

$$q = \text{const.}$$

Die Flüssigkeit ist dann homogen und inkompressibel, und es bleiben nur vier unbekannte Funktionen zurück, nämlich u, v, w, p .

Ist diese Bedingung erfüllt, so vereinfacht sich sofort die Natur der Flüssigkeitsbewegung. Das q fällt aus der Gleichung **13(a)** aus, und dieselbe reduciert sich auf die Form der Solenoidalbedingung:

$$(a) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Erinnern wir uns zugleich an die immer gültige Grenzflächenbedingung **13(b)**, so erhalten wir das Resultat:

Das Geschwindigkeitsfeld in einer homogenen, inkompressiblen Flüssigkeit ist ein solenoidales Vektorfeld, welches an den Grenzflächen der solenoidalen Grenzflächenbedingung genügt.

15. Wirbelfreie Bewegung. — Aus der Konstanz der Dichte folgt sofort, daß der beschleunigende Gradient eine potentielle Vektorgröße wird. Setzen wir voraus, daß die äußere beschleunigende Kraft X, Y, Z von einer Kraftfunktion abhängt, also eine potentielle Vektorgröße ist, so müssen auch die Ausdrücke links in den Gleichungen 14(a) die Komponenten einer potentiellen Vektorgröße sein. Mit anderen Worten: in einer homogenen, inkompressiblen Flüssigkeit, welche der Wirkung nur von Kräften konservativer Natur ausgesetzt ist, ist die Beschleunigung des Flüssigkeitspartikelchens eine potentielle Vektorgröße.

Unter diesen Umständen findet, wie HELMHOLTZ nachgewiesen hat, keine Wirbelbildung in der Flüssigkeit statt. Wenn die Wirbel 4(b) der Geschwindigkeit (u, v, w) im Anfangszustand Null sind, so werden sie immer Null bleiben; oder, wenn das Geschwindigkeitsfeld zur Anfang der Zeit ein potentielles Feld ist, so wird es immer ein potentielles Feld bleiben, und die Geschwindigkeit läßt sich zu jeder Zeit durch ein Geschwindigkeitspotential φ ausdrücken,

$$(a) \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Aus den kinematischen Bedingungen folgt also, daß das Geschwindigkeitsfeld der homogenen, inkompressiblen Flüssigkeit solenoidal ist. Unter den angegebenen dynamischen Bedingungen wird das Feld zugleich potentiell sein. Diese kinematischen und dynamischen Bedingungen zusammen haben also zur Folge, daß das Geschwindigkeitsfeld ein LAPLACE'sches Feld wird, dessen Geschwindigkeitspotential die LAPLACE'sche Gleichung erfüllt,

$$(b) \quad \nabla^2 \varphi = 0.$$

Mit dieser Vereinfachung der geometrischen Natur des hydrodynamischen Stromfeldes folgt auch eine Vereinfachung der Dynamik desselben. Die Substitution von (a) in die Gleichungen 14(a) gestattet nämlich, eine Integration dieser Gleichungen auszuführen. Das Resultat dieser Integration wird, wenn wir die äußere Kraft (X, Y, Z) gleich Null setzen:

$$(c) \quad p = P - q \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} q \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\}.$$

Diese Gleichung giebt den Druck p , wenn das Geschwindigkeitspotential φ und der während des Ruhezustandes herrschende statische Druck P bekannt sind.

16. Bewegung fremder Körper in der Flüssigkeit. — Wir haben uns die Aufgabe gestellt, die Bewegung eines Systems von Körpern in der Flüssigkeit zu untersuchen.

Wir nehmen an, daß in der Flüssigkeit keine fremde Kraft wirkt, und daß die Flüssigkeit homogen und inkompressibel ist. Weiter setzen wir voraus, daß die Flüssigkeit in unendlicher Entfernung ruht, und daß die ganze Bewegung der Flüssigkeit von der Bewegung der Körper herrührt. Das heißt, der Anfangszustand soll ein solcher sein, daß sowohl die Flüssigkeit als die Körper sich in Ruhe befinden.

Wenn die Körper sich zu bewegen anfangen, setzt auch die Bewegung in der Flüssigkeit ein. Diese Bewegung wird eine solenoidale und wirbelfreie, also eine LAPLACE'sche, und das Geschwindigkeitsfeld wird folglich nach dem Satze 10(A) durch die Normalgeschwindigkeit an der Oberfläche der Körper in eindeutiger Weise bestimmt.

Der augenblicklich vorhandene Bewegungszustand der eingetauchten Körper bestimmt also die Bewegung der Flüssigkeit zu jeder Zeit eindeutig. Passieren beispielsweise die Körper zu einer Zeit t_1 durch dieselben Lagen, welche sie zu einer früheren Zeit t_0 gehabt haben, mit denselben Geschwindigkeiten, so hat die Flüssigkeit zu den Zeiten t_1 und t_0 identisch dieselbe Bewegung, und in demselben Augenblick, in welchem die Bewegung der Körper aufhört, hört auch jede Bewegung in der Flüssigkeit auf.

Dieser Umstand, daß die Bewegung der Flüssigkeit durch die Bewegung der eingetauchten Körper eindeutig bestimmt ist, macht eine zweckmäßige Teilung der vorliegenden Aufgabe, in einen kinematischen und einen dynamischen Teil möglich.

Wir können uns erst die Bewegungen der Körper als gegeben denken, und die dadurch eindeutig bestimmten Stromfelder in rein geometrischer Weise untersuchen. Diese einleitende Aufgabe ist eine rein kinematische. Allerdings beruht die Möglichkeit, diese Aufgabe getrennt zu behandeln, implicite auf den dynamischen Eigenschaften der Flüssigkeit, welche die potentielle Natur der Strom-

felder zur Folge haben. Aber sonst wird sie kein direktes Zurückgreifen auf dynamische Betrachtungen erfordern, so daß die Behandlungsweise eine rein kinematische oder geometrische wird.

Wenn wir diese geometrische oder kinematische Aufgabe vollständig erschöpft haben, können wir die dynamische Diskussion der gefundenen Bewegung mit Hilfe der allgemeinen Druckformel 15(c) angreifen, um die dynamische Wechselwirkung von Körper und Flüssigkeit zu studieren.

Zweiter Teil.

Kinematische Untersuchung der Flüssigkeitsbewegungen bei gegebenen Bewegungen der Kugeln.

Erster Abschnitt.

Volumändernde Kugeln.

17. Koordinaten und Geschwindigkeitskomponenten einer Kugel.

— Um analytische Einfachheit zu erreichen, haben wir bei der Aufstellung unseres Problems angenommen, daß die in der Flüssigkeit vorhandenen fremden Körper Kugelform haben.

Es sei zunächst nur eine Kugel vorhanden, und es seien a, b, c die Koordinaten des Mittelpunktes und d der Radius derselben. Ihre Gleichung wird dann

$$(a) \quad (x' - a)^2 + (y' - b)^2 + (z' - c)^2 = d^2,$$

wenn x', y', z' die laufenden Koordinaten auf der Kugelfläche sind.

Die Lage und die Bewegung der Kugelfläche ist zu jeder Zeit bekannt, wenn die vier Parameter

$$(b) \quad a, b, c, d$$

als Functionen der Zeit gegeben sind. Dabei sehen wir von einer möglichen Rotationsbewegung der Kugel ab, da dieselbe keine wesentliche Veränderung der geometrischen Verhältnisse zur Folge hat, und für die Bewegung in einer reibungslosen Flüssigkeit belanglos bleibt.

Die Ableitungen der vier Parameter (b) nach der Zeit, welche wir mit der NEWTON'schen Bezeichnung

$$(c) \quad \dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, \dot{d}$$

schreiben, sind die vier Geschwindigkeitskomponenten der Kugel. Die drei ersten \dot{a} , \dot{b} , \dot{c} stellen die translatorische Geschwindigkeit dar, die letzte \dot{d} die Geschwindigkeit, mit der sich die Länge des Kugelradius ändert.

Der von dem Kugelcentrum a , b , c nach einem beliebigen Raumpunkt x , y , z gerichtete Radius vektor ist die immer positive Gröfse

$$(d) \quad r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

welche wegen des darin enthaltenen a , b , c implicite von der Zeit t abhängig ist.

18. Volumändernde Kugel. — Wir werden in diesem Abschnitte annehmen, dafs die Kugel keine translatorische Bewegung hat, und dafs nur der Radius d Veränderungen erleidet. \dot{a} , \dot{b} , \dot{c} sind also vorläufig Null, und a , b , c von der Zeit unabhängige Gröfsen.

Für die Bestimmung der in der umgebenden Flüssigkeit erzeugten Bewegung genügt die Kenntniss der Bewegung der Kugeloberfläche; die möglichen Bewegungen im Inneren der Kugel haben keine Bedeutung. Um vollständige Vektorfelder zu erhalten, wollen wir aber im allgemeinen von bestimmten Voraussetzungen über den Bewegungszustand auch im ganzen Inneren der Kugel ausgehen.

Wir setzen dann voraus, dafs sich an die radiale Geschwindigkeit \dot{d} eines Oberflächenpunktes im Inneren eine radiale Geschwindigkeit proportional der Entfernung vom Centrum anschliesst. Diese radiale Geschwindigkeit innerhalb der Kugel wird also

$$\frac{r}{d} \dot{d}.$$

Wie man unmittelbar sieht, läfst sie sich als die partielle Ableitung nach r von dem Potential

$$(a) \quad \Phi = \frac{1}{2} \frac{r^2}{d} \dot{d} \quad .$$

darstellen. Dieses Potential erfüllt nicht die LAPLACE'sche Gleichung, denn man findet

$$(b) \quad \nabla^2 \Phi = 3 \frac{\dot{d}}{d}.$$

Die Natur der anschliesenden Bewegung in der umgebenden Flüssigkeit läfst sich sofort ohne Rechnung voraussehen. Die Geschwindigkeit mufs wegen der Symmetrie rein radial sein. Und da

der Fluß mit wachsender Entfernung Kugelflächen durchsetzt, deren Oberflächen proportional dem Quadrat der Radien zunehmen, so folgt aus der solenoidalen Natur des Flusses, daß die Geschwindigkeit umgekehrt wie das Quadrat dieses Radius abnehmen muß. Der allgemeine Ausdruck der Geschwindigkeit wird also eine Konstante dividiert durch r^2 , und da die Geschwindigkeit an der Oberfläche der Kugel, das heißt für $r = d$, den Wert \dot{d} haben soll, so wird der definitive Ausdruck

$$\frac{d^2}{r^2} \dot{d}.$$

Dieser Ausdruck ist die partielle Ableitung nach r von

$$(c) \quad \varphi = -\frac{d^2}{r} \dot{d},$$

welches also das Potential der Flüssigkeitsbewegung in der Umgebung der Kugel darstellt.

19. Totale und spezifische Volumenausdehnungsgeschwindigkeit. —

Als die charakteristischen Parameter des Feldes außerhalb und innerhalb der Kugel treten hier Radius d und Radialgeschwindigkeit \dot{d} auf. Gewissen Aufgaben gegenüber sind aber andere Parameter vorzuziehen. Bezeichnen wir das Volumen der Kugel durch E , so ist

$$(a) \quad E = \frac{4}{3} \pi d^3.$$

Durch Differentiation nach der Zeit ergibt sich für die kubische Volumenausdehnungsgeschwindigkeit

$$(b) \quad \dot{E} = 4 \pi d^2 \dot{d}.$$

Schließlich werden wir durch ϵ die auf die Volumeinheit bezogene oder spezifische Ausdehnungsgeschwindigkeit bezeichnen, so daß

$$(c) \quad \dot{E} = \epsilon E.$$

ϵ stellt dann das dreifache der lineären Ausdehnungsgeschwindigkeit $\frac{\dot{d}}{d}$ im Inneren der Kugel dar.

Das Potential der Ausdehnungsbewegung im Inneren der Kugel drückt sich besonders einfach durch die spezifische Ausdehnungsgeschwindigkeit ϵ aus,

$$(d) \quad \Phi = \frac{1}{6} \dot{e} r^2,$$

und besonders bemerkt man, daß \dot{e} die Divergenz des Feldes darstellt,

$$(e) \quad \nabla^2 \Phi = \dot{e}.$$

Das Potential des anschließenden äußeren Feldes nimmt besonders einfache Form an, wenn wir die totale Volumausdehnungsgeschwindigkeit \dot{E} einführen, nämlich

$$(f) \quad \varphi = - \frac{\dot{E}}{4 \pi r}.$$

20. Das Feld der volumändernden Kugel. — Das Feld in der Flüssigkeit ist solenoidal und potentiell. Innerhalb der Kugel ist das Feld wohl potentiell, nicht aber solenoidal, da wir dort eine Divergenz \dot{e} haben. An der Grenzfläche ist die solenoidale Grenzflächenbedingung (8) erfüllt. Da aber an der Grenzfläche kein tangentieller Vektorkomponent vorkommt, so wird gleichzeitig die potentielle Grenzflächenbedingung (9) von selbst erfüllt, so daß die Partialfelder zusammen ein potentielles Gesamtfeld darstellen. Durch Hinzufügen einer passenden additiven Konstante Φ_0 zu dem Potential Φ im inneren Raume wird man kontinuierlichen Übergang der Potentiale an der Grenzfläche erhalten. Die Äquipotentialflächen $\Phi = \text{const.}$ im inneren und $\varphi = \text{const.}$ im äußeren Raume sind konzentrische Kugeln.

Im äußeren Raum ist der Ausdruck der Radialgeschwindigkeit

$$(a) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\dot{E}}{4 \pi r^2}.$$

Multipliziert man diesen Ausdruck mit der Oberfläche $4 \pi r^2$ einer Kugel mit dem Radius r , so erhält man \dot{E} , welches also den Vektorfluß durch eine Kugelfläche um das Feldcentrum, und folglich auch den Vektorfluß durch eine beliebige, die volumändernde Kugel umschließende Fläche darstellt.

Will man dieses äußere Feld durch Solenoide darstellen, so ist zu beachten, daß die Vektorlinien oder Stromlinien radiale Strahlen sind. Vektorröhren mit gleich großem Vektorfluß werden also zu Kegeln beliebiger Form, die aber gleiche Öffnung und ihre Spitzen im Mittelpunkt der Kugel haben. Besonders kann man, um die Darstellung in der Ebene ausführen zu können, koaxiale Umdrehungskegel benutzen. Dieselben schneiden aus einer Kugelfläche Kugeln von gleicher Höhe aus, so daß die Konstruktion der Schnitt-

linien dieser Kegel mit einer beliebigen Meridianebene sehr bequem ist. Bei der Darstellung des Feldes durch Einheitsröhren hat man eine Anzahl \vec{E} solcher Kegel zu zeichnen.

In der Fig. 1 ist die expandierende Kugel durch zwei konzentrische Kreise dargestellt: der innere voll ausgezogene Kreis soll die Kugel zur Zeit t darstellen; der äußere punktierte Kreis stellt die Kugel eine kurze Zeit später dar, wenn sie ein etwas größeres Volumen hat. Die Ausdehnungsgeschwindigkeit \vec{E} ist gleich 10 gesetzt, und das umgebende Stromfeld wird durch zehn Kegel dargestellt, welche durch die gezeichneten Geraden erzeugt werden,

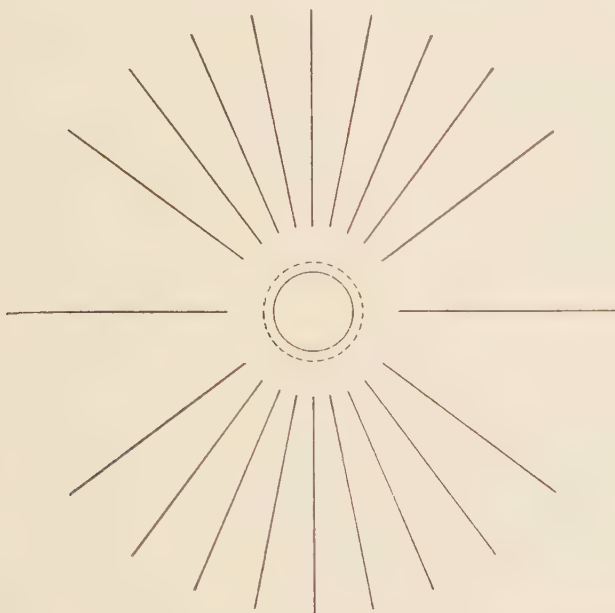


Fig. 1. Feld einer expandierenden oder einer pulsierenden Kugel.

wenn die Figur um die horizontale Gerade gedreht wird. Wählt man immer kleinere Einheiten für \vec{E} , so erhält man eine immer größere Anzahl von Röhren, und gelangt zuletzt zu der solenoidalen Darstellung des Feldes (5).

Im Anschluß an diese solenoidale Darstellung des Radialfeldes außerhalb der Kugel wird sich \vec{E} gewissermaßen als natürlicher Parameter des Feldes darbieten, so daß die Formel (a) der natürliche analytische Ausdruck des Feldes wird. Diese Formel enthält im Zähler den totalen Vektorfluß, im Nenner das Areal der von diesem Fluß durchsetzten Kugelfläche, auf deren Zunahme mit

wachsendem r die Abnahme des Vektors im umgekehrten Verhältnis des Quadrates des Abstandes beruht.

21. Mittelwerte periodischer Funktionen. — Um besonders den Fall periodischer Volumänderungen genauer zu diskutieren, werden wir erst einige Sätze über Mittelwerte periodischer Funktionen ableiten.

Es sei $f(t)$ eine periodische Funktion allgemeinsten Natur der Variablen t ; ihre Periode sei τ , so daß

$$f(t + \tau) - f(t) = 0.$$

Die totale Ableitung dieser Funktion nach t ist wieder eine periodische Funktion. Bilden wir den Mittelwert dieser Ableitung während einer Periode, so erhalten wir sofort

$$(a) \quad \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \frac{d}{dt} f(t) d\tau = \frac{1}{\tau} \{f(t + \tau) - f(t)\} = 0.$$

Wir finden also den einfachen, für uns im folgenden äußerst wichtigen Satz:

(A) *Eine Funktion der Variablen t , von der Form einer totalen Ableitung einer periodischen Funktion dieser Variablen, hat in der Periode den Mittelwert Null.*

Außer diesem linearen Mittelwert werden wir auch den quadratischen Mittelwert betrachten, besonders um zweckmäßige mittlere Intensitätsmaße von solchen Größen zu erhalten, welche den linearen Mittelwert Null haben, wie die Ableitung von $f(t)$ nach t oder $f'(t)$. Den quadratischen Mittelwert f'_m dieser Funktion werden wir durch die Gleichung

$$(b) \quad f'_m = \pm \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} [f'(t)]^2 dt}$$

definieren. Das Vorzeichen, wenn die vorliegende Aufgabe ein solches erfordert, soll nach der folgenden Regel gewählt werden:

(B) f'_m soll das Vorzeichen haben, welches $f'(t)$ zu einer gewissen gewählten Anfangszeit t_0 hat.

22. Pulsierende Kugel. — Auf die Mechanik der Vorgänge im Innern der Kugel werden wir nie genauer eingehen. Im allgemeinen werden wir jedoch voraussetzen, daß die Kugeln elastisch sind, und

dafs darauf beruhende periodische Volumänderungen oder Pulsationen vorliegen.

Das Volumen E der Kugel schwingt dann um einen gewissen mittleren Wert E_0 . Die Amplitude der Schwingungen nehmen wir im allgemeinen klein an, so dafs E nur sehr wenig von E_0 verschieden ist.

Die Volumausdehnungsgeschwindigkeit \dot{E} wird dann eine periodische Funktion, deren Mittelwert nach dem Satze (A) des vorhergehenden Paragraphen den Wert Null erhält. Als mittleres Intensitätsmafs dieser Geschwindigkeit benutzen wir das quadratische Mittel

$$(a) \quad \dot{E}_m = \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \dot{E}^2 dt}.$$

Diese Gröfse werden wir die Pulsationsintensität nennen. Dieselbe ist eine Gröfse mit Vorzeichen, und zwar erhalten wir nach der Regel des vorhergehenden Paragraphen folgendes:

Die Pulsationsintensität \dot{E}_m ist positiv, wenn sich zu der festgesetzten Anfangszeit die Kugel ausdehnt, negativ, wenn sich die Kugel zu dieser Zeit zusammenzieht.

Den Potentialausdruck

$$(b) \quad \varphi_m = -\frac{\dot{E}_m}{4\pi r},$$

wo \dot{E}_m die somit definierte, von der Zeit unabhängige Pulsationsintensität ist, können wir als eine Darstellung des mittleren Bewegungszustandes im Radialfeld betrachten, wenn wir von Einzelheiten der Bewegung, wie etwa Periode und Amplitude der Schwingungen absehen, und nach der zur betrachteten Zeit vorliegenden Phase der Schwingung nicht fragen.

Die Formel (b) hat genau dieselbe Form wie die Formel 19(f), welche die wirkliche Bewegung darstellt. Entsprechend können wir Fig. 1, welche ursprünglich ein Augenblicksbild der wirklichen Bewegung giebt, auch als eine Durchschnittsdarstellung des Feldes einer pulsierenden Kugel betrachten; und zwar können wir dabei übereinkommen, dafs eine Kugel mit positiver Pulsationsintensität so dargestellt werden soll, wie diejenige der Fig. 1, wo der punktierte Kreis auferhalb des voll ausgezogenen liegt, während eine Kugel mit negativer Pulsationsintensität durch einen vollauszugezogenen äufseren, und einen punktierten inneren Kreis dargestellt wird. (Vergl. Fig. 3 unten.)

23. Ein System von volumändernden Kugeln. — Sind gleichzeitig mehrere Kugeln vorhanden, so werden wir die einzelnen Kugeln durch Indices

$$g, h, i, j, k \dots$$

voneinander trennen. Die Kugel g hat die Koordinaten

$$a_g, b_g, c_g, d_g.$$

Unter dem Punkte g verstehen wir besonders den Mittelpunkt a_g, b_g, c_g der Kugel, r_g soll der von diesem Punkte aus gemessene Radiusvektor sein:

$$(a) \quad r_g = \sqrt{(x - a_g)^2 + (y - b_g)^2 + (z - c_g)^2},$$

und E_g soll das Volumen der Kugel g bedeuten.

Wir denken uns eine beliebige Anzahl von Kugeln gegeben, die sich in großen Abständen voneinander befinden, so daß die Radien immer klein im Verhältniß zu den Centraldistanzen sind. Die Kugeln sollen keine translatorischen Bewegungen haben, so daß die Parameter $a_g, b_g, c_g, a_h, b_h, c_h, \dots$ Konstanten sind. Doch sollen die Radien d_g, d_h, \dots , und damit die Volumina E_g, E_h, \dots veränderlich sein.

An die gegebenen Radialbewegungen der Kugeln wird sich eine eindeutig bestimmte LAPLACE'sche Bewegung im äußeren Raume anschließen. Die exakte Bestimmung des Potentials dieser Bewegung ist umständlich, und wird erst später genauer betrachtet werden. Dagegen läßt sich sofort ein Potential aufstellen, welches diese Bewegung mit großer Annäherung darstellt. Der von der Kugel g herrührende Radialstrom hat an der Oberfläche dieser Kugel selbst die endliche Geschwindigkeit d_g , aber nimmt umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung ab, und hat deshalb in der Nähe des Punktes h , wo später die Kugel h angebracht werden soll, eine Geschwindigkeit, welche klein zweiter Ordnung ist. Bilden wir deshalb einen Potentialausdruck durch Superposition der Potentiale derjenigen einfachen Radialströme, welche jede Kugel, wenn sie allein vorhanden wäre, erzeugen würde

$$(b) \quad \varphi = -\frac{\dot{E}_g}{4\pi r_g} - \frac{\dot{E}_h}{4\pi r_h} - \frac{\dot{E}_i}{4\pi r_i} - \dots,$$

so stellt dieses Potential einen Flüssigkeitsstrom dar, welcher die Grenzflächenbedingung an jeder Kugeloberfläche erfüllt, wenn wir von kleinen Größen zweiter Ordnung absehen.

Wir werden deshalb diese Lösung in den Einzelheiten studieren, um so mehr, als wir dadurch die Hilfsmittel für die weitere Lösung der uns vorliegenden kinematischen Aufgaben finden werden.

24. Zwei volumändernde Kugeln. — Sind nur zwei Kugeln g und h vorhanden, so reduciert sich die Lösung auf

$$(a) \quad \varphi = -\frac{\dot{E}_g}{4\pi r_g} - \frac{\dot{E}_h}{4\pi r_h}.$$

Die solenoidale Darstellung des entsprechenden Stromfeldes kann durch eine einfache, bei der Aufzeichnung von elektrischen und magnetischen Feldern vielfach verwendeten Konstruktion gefunden werden. Das Feld ist ein Umdrehungsfeld um die Verbindungslinie beider Kugelcentren. Man zeichnet mit dieser Linie als Achse die zwei Figuren, welche nach **20** die Stromkegel jeder einzelnen Kugel g und h darstellen. Diese Kegel werden einander in einem System von Kreisen schneiden, welche in der ebenen Zeichnung durch die Schnittpunkte der Geraden repräsentiert sind. Durch diese Kreise werden im Gesamtfelde Ströme fließen, welche der algebraischen Summe der Ströme der betreffenden beiden Kegel gleich sind. Man findet somit eine Reihe von Kreisen, durch welche ein bekannter Fluß geht, und durch Vereinigung derjenigen Kreise, die von gleichem Flusse durchsetzt werden, erhält man die gesuchten Stromröhren. Die entsprechende Konstruktion in der Meridianebene reduciert sich darauf, daß man die Kurven zieht, die diagonal durch die Parallelogramme passieren, in welche die ganze Ebene durch die einander superponierten Geraden der beiden Einzelfelder zerlegt wird.

Auf diese Weise sind die Figuren 2 und 3 erhalten. Wie oben soll ein innerer voll ausgezogener und ein äußerer punktierter Kreis eine expandierende Kugel darstellen, während ein voll ausgezogener äußerer und ein punktierter innerer Kreis eine kontrahierende Kugel bedeuten soll. Die erste Figur entspricht also zwei sich ausdehnenden Kugeln, und wir haben $\dot{E}_g = \dot{E}_h = 10$ gesetzt. Die zweite Figur entspricht einer expandierenden und einer kontrahierenden Kugel, wo $\dot{E}_g = -\dot{E}_h = 10$ gewählt ist.

Im ersten Falle zeigt die Figur, wie die radial von den Kugeln ausgehenden Ströme sich begegnen, gegeneinander umbiegen und ins Unendliche hinausströmen. Ersetzt man die expandierenden Kugeln durch gleichstark kontrahierende, so bleiben die Stromlinien unverändert, und nur die Bewegungsrichtung wird die ent-

geegengesetzte, so daß der Fluß aus dem Unendlichen gegen die Kugeln gerichtet ist. Im zweiten Falle (Fig. 3) sieht man, wie der von der expandierenden Kugel ausgehende Strom von der kontrahierenden Kugel eingezogen wird. Durch Änderung der Vorzeichen ändert sich wieder nur die Bewegungsrichtung, und die Kugeln tauschen ihre Rollen um, während der Verlauf der Stromkurven unverändert bleibt.

Auf der Fig. 2 bemerkt man eine Stelle, wo sich die beiden Ströme neutralisieren. Die Stelle ist dadurch ausgezeichnet, daß sich dort zwei Stromlinien schneiden. Wegen der Gleichheit von

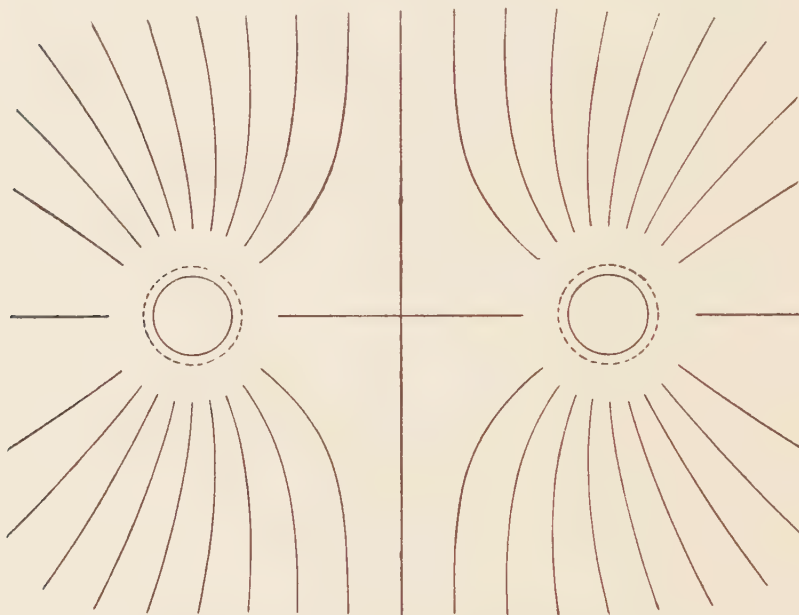


Fig. 2. Feld zweier expandierenden oder zweier mit gleicher Phase pulsierenden Kugeln.

\dot{E}_g und \dot{E}_h liegt dieser Punkt symmetrisch zwischen den beiden Kugeln. Haben aber \dot{E}_g und \dot{E}_h beliebige Werte, so sind die Abstände r_1 und r_2 dieses neutralen Punktes von den Kugelcentren durch die Relation

$$\frac{\dot{E}_g}{\dot{E}_h} = \frac{r_g^2}{r_h^2}$$

gegeben, und zwar liegt diese Stelle zwischen den Kugeln, wenn \dot{E}_g und \dot{E}_h gleiches Vorzeichen haben, und außerhalb der Kugeln auf der Seite derjenigen Kugel, welche das numerisch kleinste \dot{E} hat,

wenn \dot{E}_g und \dot{E}_h entgegengesetztes Vorzeichen haben. Sind \dot{E}_g und \dot{E}_h einander entgegengesetzt gleich, so rückt dieser Punkt ins unendlich Ferne hinaus.

Mit der Kenntnis des von zwei volumändernden Kugeln herrührenden Feldes wird man sich leicht über die allgemeine Natur des von mehreren solchen Kugeln herrührenden Feldes orientieren können. Zwischen zwei Kugeln, welche beide sich ausdehnen oder beide sich zusammenziehen, wird das Feld die allgemeine Natur des Feldes Fig. 2 beibehalten, und zwischen einer expandierenden und einer kontrahierenden Kugel die allgemeine Natur des Feldes

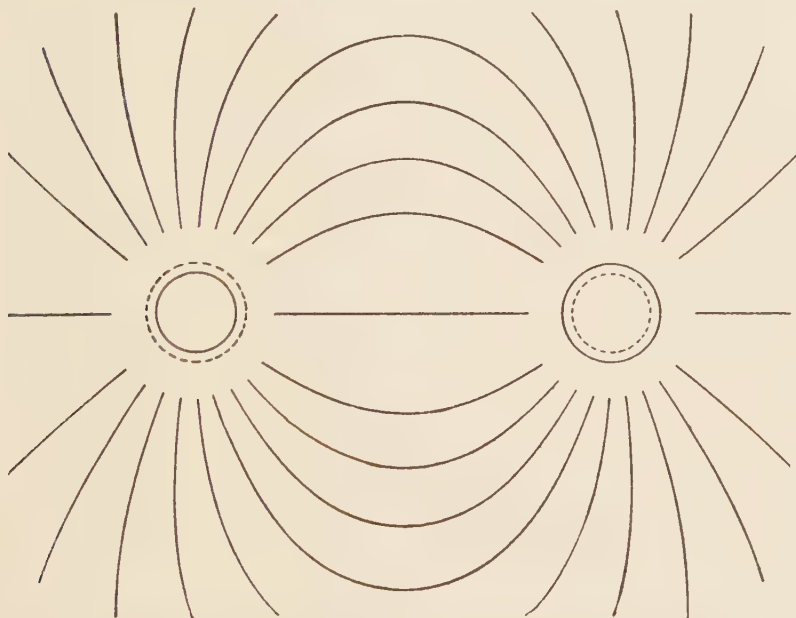


Fig. 3. Feld einer expandierenden und einer kontrahierenden Kugel, oder zweier mit entgegengesetzter Phase pulsierenden Kugeln.

Fig. 3. Nur werden sie wegen des Einflusses der anderen Kugeln etwas deformiert, so daß sie meistens ihre Symmetrie verlieren.

25. Synchron pulsierende Kugeln. — Man kann in der jetzt beschriebenen Weise ein Augenblicksbild des Flüssigkeitsstromes konstruieren. Verlaufen aber die Volumänderungen der einzelnen Kugeln nach voneinander unabhängigen Gesetzen, so wird das Stromfeld unaufhörliche Veränderungen erleiden. Betrachten wir beispielsweise zwei volumändernde Kugeln. Wenn sie im Anfangs-

augenblicke beide in gleich starker Expansion begriffen sind, so wird das Stromfeld dasjenige der Fig. 2 sein. Nimmt nun die Expansionsgeschwindigkeit der Kugel h ab, während diejenige der Kugel g unverändert bleibt oder zunimmt, so verändert sich das Feld so, daß der neutrale Punkt gegen h hin verschoben wird. Geht die Expansion der Kugel h in Kontraktion über, so wird der neutrale Punkt auf der anderen Seite von h auftreten, und zuletzt ins unendlich Ferne hinausrücken, wenn die Kontraktionsgeschwindigkeit der Kugel h der Expansionsgeschwindigkeit der Kugel g gleich wird. Wir haben dann das Feld der Fig. 3. Wir schließen also, daß bei Volumänderungen der einzelnen Kugeln nach voneinander unabhängigen Gesetzen Felder aller möglichen Typen aufeinander folgen werden. Liegen Pulsationen der Kugeln mit kommensurablen Perioden vor, so werden im allgemeinen Felder aller Typen in periodischer Weise aufeinander folgen.

Sind im besonderen sämtliche Volumausdehnungsgeschwindigkeiten proportional derselben Funktion der Zeit $f(t)$, so werden wir die Pulsationen synchron nennen. In diesem Falle scheidet sich in 23(b) die Funktion $f(t)$ als gemeinschaftlicher Faktor aus. Ohne die Natur der Bewegung zu beschränken, können wir uns die Funktion $f(t)$ so gewählt denken, daß sie den quadratischen Mittelwert Eins hat. Die Volumausdehnungsgeschwindigkeit \dot{E}_g läßt sich dann in der Form

$$(a) \quad \dot{E}_g = \dot{E}_g^m \cdot f(t)$$

schreiben, wo \dot{E}_g^m die nach 22(a) definierte Pulsationsintensität ist; und der Potentialausdruck kann

$$(b) \quad \varphi = -f(t) \left\{ \frac{\dot{E}_g^m}{4\pi r_g} + \frac{\dot{E}_h^m}{4\pi r_h} + \frac{\dot{E}_i^m}{4\pi r_i} + \dots \right\}$$

geschrieben werden. Eine Äquipotentialfläche $\varphi = \text{const.}$ bleibt in diesem Falle immer eine Äquipotentialfläche, nur mit einem in der Zeit veränderlichen Werte der Konstanten. Das ganze Stromfeld bleibt dann sich selbst ähnlich, und wir können den Satz aufstellen:

Im Falle synchroner Schwingungen hat man in der Flüssigkeit ein festes System von Stromkurven, längs deren die Flüssigkeitspartikelchen hin- und herschwingen.

In rein geometrischer Beziehung läßt sich dann die ganze Bewegung durch ein von der Zeit unabhängiges Potential darstellen:

$$(c) \quad \varphi_m = -\frac{\dot{E}_g^m}{4\pi r_g} - \frac{\dot{E}_h^m}{4\pi r_h} - \frac{\dot{E}_i^m}{4\pi r_i} - \dots,$$

wo also $\dot{E}_g^m, \dot{E}_h^m \dots$ die nach 22 definierten Pulsationsintensitäten sind; und ebenso läßt sie sich durch eine einzige Zeichnung von Stromlinien und Solenoiden darstellen.

Es ist besonders wichtig, auf die Vorzeichen der Pulsationsintensitäten zu achten. Nach der Regel 21 (B) sind die Vorzeichen von $\dot{E}_g^m, \dot{E}_h^m, \dots$ gleich denjenigen von \dot{E}_g und \dot{E}_h zu einer gewählten Anfangszeit t . Die Pulsationsintensitäten zweier Kugeln haben also gleiches Vorzeichen, wenn sie zu dieser Anfangszeit, und folglich zu jeder Zeit, beide expandierend oder beide kontrahierend sind. Dagegen haben sie entgegengesetztes Vorzeichen, wenn zur Anfangszeit, und folglich auch zu jeder Zeit, eine Kugel expandierend, und eine kontrahierend ist. Das gegenseitige Vorzeichen der Pulsationsintensitäten ist deshalb eindeutig bestimmt. Dagegen beruht es auf der freien Wahl der Anfangszeit, welche der beiden wir positiv und welche wir negativ nennen werden. Wir können auch von gleichnamigen und ungleichnamigen Pulsationen reden, oder von gleich pulsierenden und entgegengesetzt pulsierenden Kugeln, oder schliesslich von Pulsationen gleicher oder entgegengesetzter Phase. Wir merken uns also folgendes:

Im Falle gleichnamiger oder gleichphasiger Pulsationen haben die Pulsationsintensitäten gleiches Vorzeichen; im Falle ungleichnamiger Pulsationen oder Pulsationen entgegengesetzter Phase haben die Pulsationsintensitäten entgegengesetztes Vorzeichen.

Die Fig. 2 stellt das Feld zweier gleichpulsierenden, die Fig. 3 das Feld zweier entgegengesetzt pulsierenden Kugeln dar. Der Vektorfluß wird in diesem Falle als der nach 21 (B) mit Vorzeichen versehene quadratische Mittelwert des wirklichen Vektorflusses zu definieren sein.

26. Entgegengesetzt volumänderndes Kugelpaar. — Wir betrachten im besonderen zwei volumändernde Kugeln g und h , welche unendlich klein höherer Ordnung sind, und welche einander deshalb unendlich nah sein können, während noch die Formel 23 (b) mit der verlangten Annäherung gültig bleibt. Die Volumausdehnungsgeschwindigkeiten \dot{E}_g und \dot{E}_h sollen einander entgegengesetzt gleich sein und außerdem grofse Werte haben, so daß das Produkt aus dieser Gröfse und dem gegenseitigen Abstand r_{gh} der Kugeln

$$(a_1) \quad \dot{S} = \dot{E} \cdot r_{gh}$$

konstant bleibt. Bemerken wir, daß r_{gh} auf den Achsen die Projektionen $a_h - a_g$, $b_h - b_g$, $c_h - c_g$ hat, so finden wir, daß \dot{S} eine Vektorgröße ist mit den Komponenten

$$(a_2) \quad \dot{F} = \dot{E}(a_h - a_g), \quad \dot{G} = \dot{E}(b_h - b_g), \quad \dot{H} = \dot{E}(c_h - c_g).$$

Das Potential des Kugelpaares wird zunächst in der Form

$$(b) \quad \varphi = - \frac{\dot{E}_g}{4\pi r_g} - \frac{\dot{E}_h}{4\pi r_h} = - \dot{E} \left(\frac{1}{4\pi r_g} - \frac{1}{4\pi r_h} \right)$$

geschrieben werden können. Jetzt ist aber die Funktion $\frac{1}{r_h}$ aus $\frac{1}{r_g}$ dadurch entstanden, daß die Variablen a_g , b_g , c_g durch die sehr nahe liegenden Größen a_h , b_h , c_h ersetzt worden sind. Unter Vernachlässigung von Größen höherer Ordnung können wir deshalb nach TAYLOR'S Theorem

$$\frac{1}{r_h} = \frac{1}{r_g} + (a_h - a_g) \frac{\partial}{\partial a_g} \frac{1}{r_g} + (b_h - b_g) \frac{\partial}{\partial b_g} \frac{1}{r_g} + (c_h - c_g) \frac{\partial}{\partial c_g} \frac{1}{r_g}$$

schreiben. Durch Einsetzen in den Potentialausdruck (b) und Benutzung von (a₂) wird also, indem wir jetzt alle Indices weglassen,

$$(c_1) \quad \varphi = - \left\{ \dot{F} \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{4\pi r} + \dot{G} \frac{\partial}{\partial b} \frac{1}{4\pi r} + \dot{H} \frac{\partial}{\partial c} \frac{1}{4\pi r} \right\}.$$

Wenn wir die Differentiation ausführen, so ergibt sich explicite

$$(c_2) \quad \varphi = - \frac{\dot{F}(x - a) + \dot{G}(y - b) + \dot{H}(z - c)}{4\pi r^3}.$$

Bezeichnen wir durch s, x , s, y , s, z die Winkel, welche \dot{S} mit den Koordinatenachsen bildet, so werden

$$\dot{F} = \dot{S} \cos s, x, \quad \dot{G} = \dot{S} \cos s, y, \quad \dot{H} = \dot{S} \cos s, z.$$

Diese Werte setzen wir in (c₂) ein, und erinnern uns gleichzeitig, daß

$$\frac{x - a}{r} = \cos r, x, \quad \frac{y - b}{r} = \cos r, y, \quad \frac{z - c}{r} = \cos r, z$$

die Richtungskosinus des Radiusvektors sind. Wenn dann θ den

Winkel zwischen den Richtungen des Vektors \dot{S} und des Radiusvektors r bedeutet, so ist

$$\cos \theta = \cos s,x \cos r,x + \cos s,y \cos r,y + \cos s,z \cos r,z,$$

und (c₂) nimmt die Form an

$$(c_3) \quad \varphi = -\frac{\dot{S} \cos \theta}{4 \pi r^2}.$$

Die hier eingeführte Vektorgröße \dot{S} mit den Komponenten \dot{F} , \dot{G} , \dot{H} , welche als Repräsentant für die Wirkung des pulsierenden Kugelpaares in der umgebenden Flüssigkeit auftritt, werden wir das Aktionsmoment oder genauer das kinematische Aktionsmoment des Kugelpaares nennen. Die Definition dieser Größe lautet also:

Das kinematische Aktionsmoment eines Kugelpaares mit entgegengesetzt gleichen Volumenausdehnungsgeschwindigkeiten ist das Produkt der Volumenausdehnungsgeschwindigkeit der expandierenden Kugel in den von der kontrahierenden nach der expandierenden Kugel gerichteten Centralabstand der Kugeln.

Sind die Kugeln synchron pulsierend, so wird das Aktionsmoment eine periodische Funktion der Zeit mit dem Mittelwerte Null. Wir können dann das mittlere Aktionsmoment \dot{S}_m definieren als eine Vektorgröße, deren Komponenten \dot{F}_m , \dot{G}_m , \dot{H}_m die nach 21 bestimmten, mit Vorzeichen versehenen quadratischen Mittelwerte von \dot{F} , \dot{G} , \dot{H} sind. Wie man unmittelbar sieht, stimmt diese Definition auch mit der folgenden überein:

Das mittlere Aktionsmoment eines pulsierenden Kugelpaares ist das Produkt der Pulsationsintensität der positiven Kugel in den von der negativen zu der positiven Kugel gerichteten Centralabstand der Kugeln.

27. Differentiation nach einer Achse. — Die Formel (c₁) des vorhergehenden Paragraphen zeigt, daß man von dem Potential der volumändernden Kugel, welches dem reciproken Abstandsausdrucke proportional ist, zu dem Potential eines volumändernden Kugelpaares durch einen Differentiationsprozeß kommt. Für diese Differentiation werden wir eine bekannte abgekürzte Bezeichnung einführen. Wir werden

$$(a) \quad \cos s,x \frac{\partial}{\partial a} + \cos s,y \frac{\partial}{\partial b} + \cos s,z \frac{\partial}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial s}$$

schreiben, und diese Operation eine Differentiation nach der Achse s nennen. Mit dieser Bezeichnung läßt sich das Potential **26** (c_1) des volumändernden Kugelpaares in der Form

$$(b) \quad \varphi = -S \cdot \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{4\pi r}$$

schreiben.

Der Differentiation nach einer Achse kann man sich ganz allgemein bedienen, um aus einer bekannten Lösung der LAPLACE'schen Gleichung eine neue abzuleiten, genau wie wir aus dem Potential der volumändernden Kugel dasjenige des volumändernden Kugelpaares gebildet haben.

Die gegebene Lösung habe die Form

$$(c) \quad \varphi(x-a, y-b, z-c).$$

Ganz allgemein haben wir dann

$$(d) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial c} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

Differentiieren wir die LAPLACE'sche Gleichung $\nabla^2 \varphi = 0$ nach einer Koordinate x und tauschen nachher die Differentiationsordnung um, so ergibt sich

$$(e) \quad \nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Also wenn φ eine Lösung der LAPLACE'schen Gleichung ist, so giebt die Ableitung von φ nach einer Koordinate auch eine Lösung, und wenn φ die Form (c) hat, werden nach (d) auch die Ableitungen nach den Parametern a, b, c diese Eigenschaft haben.

Wegen der linearen Natur der LAPLACE'schen Gleichung können wir nachher aus den durch Differentiation gebildeten Lösungen in linearer Weise neue Lösungen bilden. Von der Lösung φ ausgehend, können wir deshalb sofort als neue Lösung

$$(f) \quad \psi = A \frac{\partial \varphi}{\partial a} + B \frac{\partial \varphi}{\partial b} + C \frac{\partial \varphi}{\partial c}$$

aufstellen. Drücken wir schließlic A, B, C durch die drei Kosinus $\cos s, x, \cos s, y, \cos s, z$ und den Proportionalitätsfaktor S aus, und benutzen die Bezeichnung (a), so ergibt sich

$$(g) \quad \psi = S \frac{\partial \varphi}{\partial s}.$$

Durch Differentiation der Lösung φ nach der Achse s und Multiplikation mit dem konstanten Faktor S hat sich die neue Lösung ψ ergeben. Durch eine neue Operation derselben Natur werden wir aus ψ die neue Lösung χ , und durch Wiederholung solcher Operationen eine beliebige Anzahl von neuen Lösungen erhalten können.

28. Räumliche Kugelfunktionen negativen Grades. — Nimmt man bei diesem Differentiationsprozefs als Ausgangsfunktion den reciproken Abstandsausdruck, oder noch besser die Funktion

$$(a) \quad -\frac{1}{4\pi r},$$

die das Potential einer volumändernden Kugel mit der Volumausdehnungsgeschwindigkeit Eins ist, so kann man sich eine physikalische Anschauung der Resultate der successiven axialen Differentiationen bilden. Durch die erste axiale Differentiation geht man von dem Potential einer volumändernden Kugel zu dem Potential eines volumändernden Kugelpaares über, dessen Kugeln einander unendlich nahe gerückt sind. Durch die nächste Differentiation geht man von dem Potential eines volumändernden Kugelpaares zu dem Potential zweier einander unendlich nahe gerückten Kugelpaare über, und so weiter.

Führt man die Differentiationen explicite aus, so findet man nach n Differentiationen einen Ausdruck, welcher aus einem homogenen Polynom n^{ten} Grades in $x-a$, $y-b$, $z-c$, multipliciert mit $r^{-(2n+1)}$ besteht. Der ganze Ausdruck wird also homogen vom $-(n+1)^{\text{ten}}$ Grade in den Variablen $x-a$, $y-b$, $z-c$. Nach der von Lord KELVIN und TAIT eingeführten Terminologie werden wir eine beliebige Funktion, welche homogen n^{ten} Grades ist, und welche die LAPLACE'sche Gleichung befriedigt, eine räumliche Kugelfunktion vom n^{ten} Grade nennen.

Durch n axiale Differentiationen des Ausdruckes (a) und Multiplikation mit einer beliebigen Konstanten kommt man also zu einer räumlichen Kugelfunktion vom $-(n+1)^{\text{ten}}$ Grade:

$$(b) \quad \varphi_{-(n+1)} = -C \frac{\partial^n}{\partial s_1 \partial s_2 \dots \partial s_n} \frac{1}{4\pi r}.$$

Durch jede axiale Differentiation werden zwei voneinander unabhängige Konstanten eingeführt, so daß die gefundene räumliche Kugelfunktion im allgemeinsten Falle $2n+1$ wesentliche Konstanten enthält.

Die gefundenen räumlichen Kugelfunktionen negativen Grades haben im Feldcentrum a, b, c eine singuläre Stelle oder einen Pol, und können deshalb auch als polare Kugelfunktionen bezeichnet werden.

29. Das Feld des volumändernden Kugelpaares. — Zur Untersuchung des Stromfeldes eines volumändernden Kugelpaares oder des Vektorfeldes einer räumlichen Kugelfunktion vom -2^{ten} Grade gehen wir am zweckmäßigsten von dem in Polarkoordinaten aufgeschriebenen Potentialausdruck **26** (c_3) aus. Die Vektorkomponenten längs der Radienvektoren und längs der Meridiankreise werden:

$$(a) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= 2 \frac{\dot{S} \cos \theta}{4 \pi r^3} \\ r \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= \frac{\dot{S} \sin \theta}{4 \pi r^3}. \end{aligned}$$

Auf einer Kugelfläche ist also die Radialgeschwindigkeit nach einem Kosinusetz, die Meridiangeschwindigkeit nach einem Sinusetz verteilt.

Der allgemeine Verlauf der Stromlinien läßt sich nach der Fig. 3 beurteilen, wenn wir die beiden pulsierenden Kugeln unendlich nahe gegeneinander rücken lassen. Doch wird bei diesem Grenzübergange die angegebene Konstruktion des Feldes illusorisch. Aus dem Ausdruck der Vektorkomponenten bildet man aber leicht die Gleichung der Vektorkurven. Die Differentialgleichungen **2** (a) derselben nehmen in Polarkoordinaten die Form

$$(b) \quad \frac{dr}{\frac{\partial \varphi}{\partial r}} = \frac{r d\theta}{r \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}}$$

an. Durch Einsetzen von (a) und Integration ergibt sich

$$(b') \quad r = K \sin^2 \theta.$$

Die Kurven, die man bei verschiedenen K erhält, sind alle untereinander ähnlich, mit dem Punkt $r = 0$ als Ähnlichkeitscentrum. Ist deshalb eine Kurve konstruiert, so findet man sämtliche andere durch proportionale Verlängerung sämtlicher Vektorradien. Beliebige Punkte einer Kurve, welche einem gegebenen Werte von K entspricht, erhält man durch die Konstruktion der Fig. 4. Man

zeichnet einen Kreis mit dem Radius $OX = OA = K$. Ist XOA der gewählte Winkel θ , so findet man durch Projektion von OA auf die Y -Achse die Länge $OB = K \sin \theta$, und durch Projektion dieser Länge auf OA zurück die gesuchte Länge $OC = K \sin^2 \theta$. C ist also der gesuchte Kurvenpunkt. Durch Umkehrung dieser Konstruktion kann man, wenn ein beliebiger Punkt der Kurve gegeben ist, den entsprechenden Parameter K dieser Kurve finden.

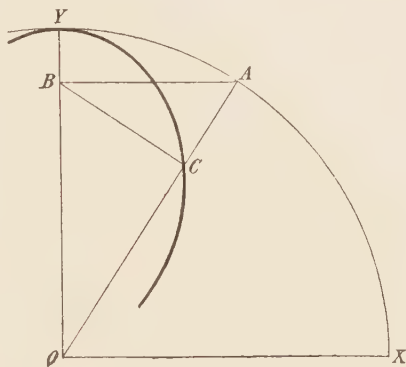


Fig. 4.

Zeichnet man das ganze System von Kurven, welche der in Fig. 4 ausgezogenen Kurve ähnlich sind, so erhält man das Bild eines Stromes, welcher von der expandierenden Kugel ausgeht und von der kontrahierenden Kugel eingeogen wird.

Sind die beiden Kugeln entgegengesetzt pulsierend, so werden die Flüssigkeitspartikelchen längs Elementen dieser Kurven hin und her oscillieren.

Zweiter Abschnitt.

Eine translatorisch bewegte Kugel mit konstantem oder mit veränderlichem Volumen.

30. Die translatorisch bewegte Kugel. — Kehren wir wieder zu dem einfachen Fall zurück, daß nur eine einzige Kugel in der Flüssigkeit vorhanden ist. Jetzt soll der Radius d unveränderlich sein, während das Centrum a, b, c der Kugel mit der Geschwindigkeit s fortschreitet, deren Komponenten $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}$ sind.

Die einfache Translationsbewegung innerhalb der Kugel ist eine sowohl solenoidale als potentielle Bewegung, welche durch das Potential

$$(a_1) \quad \Phi = \dot{a}(x - a) + \dot{b}(y - b) + \dot{c}(z - c)$$

dargestellt werden kann; oder in Polarkoordinaten

$$(a_2) \quad \Phi = s r \cos \theta,$$

wo θ der Winkel zwischen dem Radiusvektor r und der Geschwindigkeit s ist. Die radiale Geschwindigkeit an der Oberfläche der Kugel wird

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = s \cos \theta;$$

die daran solenoidal anschliessende Bewegung im äusseren Raume soll nun gesucht werden.

Diese Radialgeschwindigkeit ist auf der Oberfläche der Kugel nach einem Kosinusetz verteilt. Dieselbe Verteilung über eine Kugelfläche hatte die Geschwindigkeit in dem von einem volumändernden Kugelpaar erzeugten Feld, wo nach 29(a)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 2 \frac{\dot{S} \cos \theta}{4 \pi r^3}$$

war. Dieses Feld wird also an der Oberfläche der Kugel, das heisst für $r = d$, die verlangte Radialgeschwindigkeit $s \cos \theta$ haben, wenn wir

$$(b_1) \quad \dot{S} = 2 \pi d^3 \cdot s$$

setzen. Führen wir also diesen Wert des kinematischen Aktionsmomentes in den Potentialausdruck des volumändernden Kugelpaares ein, so erhalten wir das Potential der translatorisch bewegten Kugel.

Das Aktionsmoment \dot{S} des äquivalenten Kugelpaares werden wir auch das Aktionsmoment der translatorisch bewegten Kugel nennen. Führen wir nach 19(a) das Volumen E anstatt des Radius d der Kugel ein, so erhalten wir als einfachere Definition dieser Grösse

$$(b_2) \quad \dot{S} = \frac{3}{2} s E.$$

Bemerken wir schliesslich, dass s eine Vektorgrösse ist mit den Komponenten \dot{a} , \dot{b} , \dot{c} , so erhalten wir als Ausdruck der Komponenten des Aktionsmomentes

$$(b_3) \quad \dot{F} = \frac{3}{2} \dot{a} E, \quad \dot{G} = \frac{3}{2} \dot{b} E, \quad \dot{H} = \frac{3}{2} \dot{c} E.$$

Also:

Das kinematische Aktionsmoment der fortschreitenden Kugel ist das Produkt der mit $\frac{3}{2}$ multiplizierten Geschwindigkeit der Kugel in ihr Volumen.

Nachdem somit das Aktionsmoment definiert ist, sowohl für eine fortschreitende Kugel, als für ein volumänderndes Kugelpaar, können wir den folgenden Satz aufstellen:

Eine fortschreitende Kugel und ein volumänderndes Kugelpaar erzeugen dasselbe Feld in der umgebenden Flüssigkeit, wenn sie dasselbe kinematische Aktionsmoment haben.

Das Potential der Bewegung außerhalb der fortschreitenden Kugel können wir deshalb je nach Belieben in einer der Formen **26** (c_1), (c_2), (c_3) oder **27** (b) schreiben. Setzen wir im ersten dieser Ausdrücke die Werte der Komponenten \dot{F} , \dot{G} , \dot{H} des Aktionsmomentes ein, so wie dieselben aus der Formel (b_1) hervorgehen, so ergibt sich

$$(c_1) \quad \varphi = -\frac{1}{2} \frac{d^3}{r^3} \left\{ \dot{a}(x-a) + \dot{b}(y-b) + \dot{c}(z-c) \right\},$$

was der Form (a_1) des Potentials im inneren Raume entspricht. Die Substitution von (b_1) in **27** (b) giebt

$$(c_2) \quad \varphi = -\frac{1}{2} \frac{d^3}{r^2} \dot{s} \cos \theta,$$

was (a_2) entspricht.

31. Die Geschwindigkeitsverteilung im Felde der fortschreitenden Kugel. — Aus den Potentialen **30** (a_2) und **30** (c_2) bilden wir die Geschwindigkeitskomponenten in radialer Richtung und tangentiell zu den Meridiankreisen. Die Translationsbewegung im inneren Raume wird dann durch die Geschwindigkeitskomponenten

$$(a) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \dot{s} \cos \theta, \quad \frac{\partial \Phi}{r \partial \theta} = -\dot{s} \sin \theta$$

dargestellt. Im äußeren Raume erhält man entsprechend die Geschwindigkeitskomponenten:

$$(b) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \dot{s} \frac{d^3}{r^3} \cos \theta, \quad \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = \frac{1}{2} \dot{s} \frac{d^3}{r^3} \sin \theta,$$

welche sich an der Oberfläche der Kugel, das heißt für $r = d$, auf die Werte

$$(b') \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=d} = \dot{s} \cos \theta, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \right)_{r=d} = \frac{1}{2} \dot{s} \sin \theta$$

reducieren.

Die Verteilung der Geschwindigkeitskomponenten (a) im inneren Raume längs eines beliebigen Meridiankreises sieht man aus der Figur 5a, wo die Komponenten punktiert, die Resultanten voll ausgezogen sind. Die radiale Komponente der Geschwindigkeit ist nach einem Kosinusetz verteilt, die tangentielle Komponente nach einem Sinusetz, und zwar negativ, so daß sie längs des ganzen Meridiankreises von dem negativen, hinteren Pole der Kugel gegen den positiven, vorderen Pol gerichtet ist. Diese Verteilung der Geschwindigkeiten im inneren Raume ist von Kugelfläche zu Kugelfläche unverändert und wird also im besonderen auch auf der Grenzfläche der Kugel durch die Figur 5a dargestellt.

Die Geschwindigkeitsverteilung in derjenigen Flüssigkeitsschicht, welche mit der Kugel in Berührung ist, wird durch die Formeln (b') und die Figur 5b dargestellt. Wenn man von der Kugel zu der

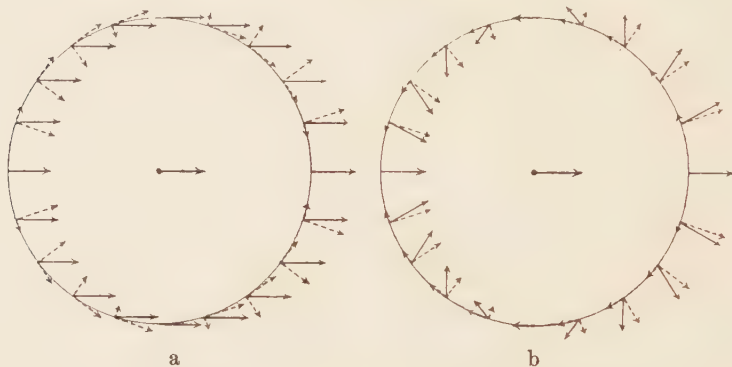


Fig. 5. Erste Darstellung der Geschwindigkeit an der Oberfläche der fortschreitenden Kugel.

anliegenden Flüssigkeitsschicht übergeht, so bleibt die radiale Komponente unverändert erhalten, und der Unterschied reduciert sich darauf, daß die tangentielle Komponente mit dem entgegengesetzten Vorzeichen und der halben Intensität auftritt. Dieselbe Geschwindigkeitsverteilung findet man auf allen konzentrischen Kugelflächen in der Flüssigkeit wieder, nur, daß die Intensität proportional dem reciproken Kubus des Abstandes vom Kugelcentrum abnimmt.

Die Resultantengeschwindigkeit im inneren Raume ist überall konstant an Richtung und Größe. In der Flüssigkeit hat sie in der polaren Achse dieselbe Richtung, wie die Geschwindigkeit der Kugel. Mit zunehmendem Werte von θ weicht sie mehr und mehr von dieser Richtung ab. Die Geschwindigkeit in der Flüssigkeit wird im besonderen auf derjenigen der Kugel senkrecht, wenn die Kom-

ponenten (b) entgegengesetzt gleiche Projektionen auf der Richtung s erhalten. Wie man sich leicht überzeugt, tritt dieses für denjenigen Wert von θ ein, welche die Gleichung

$$(c) \quad \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} = 0$$

erfüllt, das heißt auf dem Kegel

$$(c') \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

oder

$$(c'') \quad \operatorname{tg} \theta = \sqrt{2}.$$

Diese letztere Gleichung giebt eine zweckmäßige Konstruktion des Winkels θ , welcher zwischen 54° und 55° liegt. Für noch größere Werte von θ bildet die Geschwindigkeit der Flüssigkeit stumpfe Winkel mit derjenigen der Kugel, und ist ihr in der Äquatorebene genau entgegengesetzt gerichtet. Wenn θ weiter wächst, dreht sich die Geschwindigkeit in der Flüssigkeit weiter, passiert durch die senkrechte Lage, wenn θ den durch (c), (c') oder (c'') bestimmten Wert hat, nur mit den negativen Vorzeichen der Quadratwurzel, und wird schließlich für $\theta = \pi$ wieder der Geschwindigkeit der Kugel gleichgerichtet.

An der Oberfläche reduziert sich die relative Geschwindigkeit eines Kugelpunktes in Bezug auf den anliegenden Flüssigkeitspunkt auf die rein tangentielle Gleitungsgeschwindigkeit

$$(d) \quad -\frac{3}{2} s \sin \theta.$$

Wegen des Rückflusses der umgebenden Flüssigkeit ist diese Gleitungsgeschwindigkeit größer als die Meridiankomponente (a) der absoluten Geschwindigkeit s der Kugel. Man kann sie sich als die Tangentialkomponente einer Geschwindigkeit

$$(e) \quad \frac{3}{2} s$$

denken, welche die aktuelle Geschwindigkeit s der Kugel um den Faktor $\frac{3}{2}$ übertrifft.

32. Andere Auflösung der Geschwindigkeit. — Wenn wir rechtwinklige Koordinaten benutzen, sind die Potentiale der inneren und der äußeren Bewegung nach 30 (a_1) und (c_1):

$$\Phi = a(x - a) + b(y - b) + c(z - c)$$

(a)

$$\varphi = -\frac{1}{2} \frac{d^3}{r^3} \left\{ a(x - a) + b(y - b) + c(z - c) \right\}.$$

Das Potential φ enthält die Koordinaten x, y, z teils explicite, teils implicite in r . Bilden wir deshalb die rechtwinkligen Geschwindigkeitskomponenten in der Weise, daß wir erst in Bezug auf die in r implicite enthaltenen x, y, z und dann in Bezug auf die explicite auftretenden x, y, z differentiieren, so entstehen folgende binomische Ausdrücke, in denen die unvollständigen Differentiationen durch δ bezeichnet sind:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\delta \varphi}{\delta r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\delta \varphi}{\delta x} \\ (b) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\delta \varphi}{\delta r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\delta \varphi}{\delta y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \frac{\delta \varphi}{\delta r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\delta \varphi}{\delta z}. \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit zerlegt sich also in zwei Partialgeschwindigkeiten. Die erste derselben hat Komponenten proportional den partiellen Ableitungen von r , welche die Richtungskosinus des Radiusvektor darstellen. Diese Partialgeschwindigkeit ist also rein radial, und hat den absoluten Wert

$$(c) \quad \frac{\delta \varphi}{\delta r} = \frac{3}{2} \frac{d^3}{r^3} \{a(x-a) + b(y-b) + c(z-c)\},$$

oder, wenn wir zu Polarkoordinaten zurückkehren,

$$(c') \quad \frac{\delta \varphi}{\delta r} = \frac{3}{2} \frac{d^3}{r^3} s \cos \theta,$$

welches das $\frac{3}{2}$ fache der eigentlichen Radialkomponente 31 (b) ist. Auf der Oberfläche der Kugel hat diese radiale Geschwindigkeitskomponente den Wert

$$(c'') \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=a} = \frac{3}{2} s \cos \theta.$$

Für die zweite Partialgeschwindigkeit findet man explicite die rechtwinkligen Komponenten

$$(d) \quad \frac{\delta \varphi}{\delta x} = -\frac{1}{2} \frac{d^3}{r^3} a, \quad \frac{\delta \varphi}{\delta y} = -\frac{1}{2} \frac{d^3}{r^3} b, \quad \frac{\delta \varphi}{\delta z} = -\frac{1}{2} \frac{d^3}{r^3} c.$$

Dieses stellt eine Geschwindigkeit dar, welche überall in der Flüssigkeit gleiche Richtung hat, nämlich die der Geschwindigkeit der

Kugel entgegengesetzte Richtung. Die Resultante dieser Partialgeschwindigkeit kann also

$$(d') \quad -\frac{1}{2} \frac{d^3}{r^3} \dot{s}$$

geschrieben werden. Auf der Oberfläche der Kugel hat sie den Wert

$$(d'') \quad -\frac{1}{2} \dot{s}.$$

Die Formeln (c') und (d') stellen eine Auflösung der Geschwindigkeit der Flüssigkeit dar, in zwei zu einander nicht rechtwinklige Komponenten: eine längs des Radiusvektor, und eine längs der Fortschreitungsrichtung der Kugel. Diese Geschwindigkeit stellen wir mit der translatorischen im Inneren der Kugel zusammen. Fig. 6a zeigt die Verteilung der letzteren auf einer Kugelfläche, beispielsweise

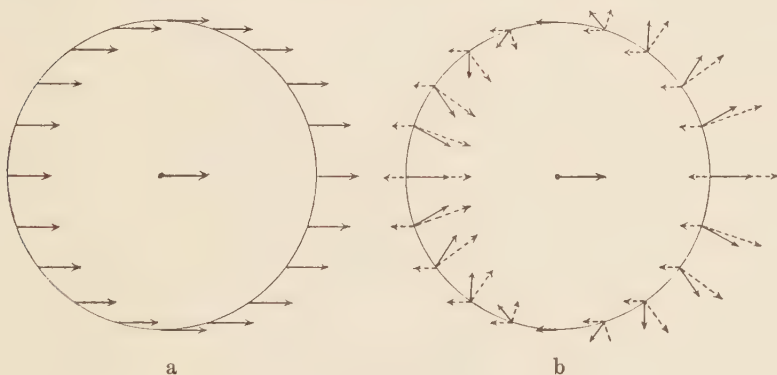


Fig. 6. Zweite Darstellung der Geschwindigkeit an der Oberfläche der fortschreitenden Kugel.

der Oberfläche der Kugel; und Fig. 6b stellt die Geschwindigkeit (c''), (d'') der anliegenden Flüssigkeitsschicht dar. Der Übergang besteht darin, daß die translatorische Geschwindigkeit \dot{s} durch eine halb so große und entgegengesetzte Geschwindigkeit (d'') ersetzt wird, und gleichzeitig eine Radialgeschwindigkeit (c'') hinzugefügt wird. Auf den folgenden, konzentrischen Kugelflächen in der Flüssigkeit bleibt die Geschwindigkeitsverteilung immer dieselbe (Fig. 6b), nur, daß wieder die Intensität proportional dem reciproken Kubus der Entfernung abnimmt.

Die Geschwindigkeit der Kugel relativ zu dem Rückfluß (d'') der anliegenden Flüssigkeitsschicht wird wieder die mit $\frac{3}{2}$ multiplizierte aktuelle Geschwindigkeit \dot{s} der Kugel eine Geschwindigkeit, deren Tangentialkomponente die Gleitungsgeschwindigkeit **31** (d) an

der Kugeloberfläche giebt, und deren Normalkomponente die radiale Partialgeschwindigkeit (c'') ist.

33. Aktionsgeschwindigkeit und kinematisches Aktionsmoment.

— Diese Überlegungen zeigen die eigentümliche Bedeutung der Geschwindigkeit $\frac{3}{2}\dot{s}$, einer Geschwindigkeit, welche die Kugel gewissermaßen relativ zur umgebenden rückwärts getriebenen Flüssigkeit hat. Die rechtwinkligen Komponenten dieser Geschwindigkeit seien

$$(a) \quad \dot{f} = \frac{3}{2}\dot{a}, \quad \dot{g} = \frac{3}{2}\dot{b}, \quad \dot{h} = \frac{3}{2}\dot{c}.$$

Die Bedeutung dieser Geschwindigkeit ist schon in anderer Weise hervorgetreten, denn das Produkt dieser Geschwindigkeit in das Volumen der Kugel bildet das kinematische Aktionsmoment der Kugel. Nach 30(b₃) wird nämlich

$$(b) \quad \dot{F} = \dot{f}E, \quad \dot{G} = \dot{g}E, \quad \dot{H} = \dot{h}E.$$

Wir werden deshalb diese Geschwindigkeit $\frac{3}{2}\dot{s}$ oder \dot{f} , \dot{g} , \dot{h} , welche den auf jede Volumeinheit der Kugel kommenden Betrag des Aktionsmomentes darstellt, als die Aktionsgeschwindigkeit der Kugel bezeichnen. Wir können also die folgenden Definitionen aufstellen:

(A) *Die Aktionsgeschwindigkeit der in ursprünglich ruhender Flüssigkeit fortschreitenden Kugel ist die mit dem Faktor $\frac{3}{2}$ multiplizierte aktuelle Geschwindigkeit der Kugel.*

(B) *Das kinematische Aktionsmoment der Kugel ist das Produkt der Aktionsgeschwindigkeit in das Volumen der Kugel.*

34. Solenoidale Darstellung des Feldes der fortschreitenden

Kugel. — Sowohl das Translationsfeld innerhalb der Kugel, als das anschließende Feld in der Flüssigkeit ist gleichzeitig solenoidal und potentiell. An der Grenzfläche wird aber nur die solenoidale und nicht die potentielle Grenzflächenbedingung erfüllt. Das Gesamtfeld wird also ein Solenoidalfeld, nicht aber ein Potentialfeld. Die Grenzfläche bildet eine Diskontinuitätsfläche der Potentiale; die Tangentialkomponente erleidet, wie wir gesehen haben, eine plötzliche Veränderung, so daß die Grenzfläche eine Gleitungsfläche oder Wirbelfläche bildet. Stellen wir deshalb beide Einzelfelder graphisch durch Lamellen dar (6), so werden sich dieselben nicht kontinuierlich durch die Grenzfläche hindurch fortsetzen. Dagegen werden die Solenoide (5) der beiden Felder kontinuierlich ineinander übergehen,

nur mit einer plötzlichen Richtungsveränderung an der Grenzfläche.

Im Inneren der Kugel ist der ganze Vektorfluß durch einen Kreis in der Äquatorialebene mit dem Radius r .

$$(a) \quad F = \pi r^2 \dot{s},$$

oder, wenn wir nach 30 (b₁) die Geschwindigkeit \dot{s} durch das Aktionsmoment \dot{S} ersetzen,

$$(a') \quad F = \frac{\dot{S}}{2 d^3} r^2.$$

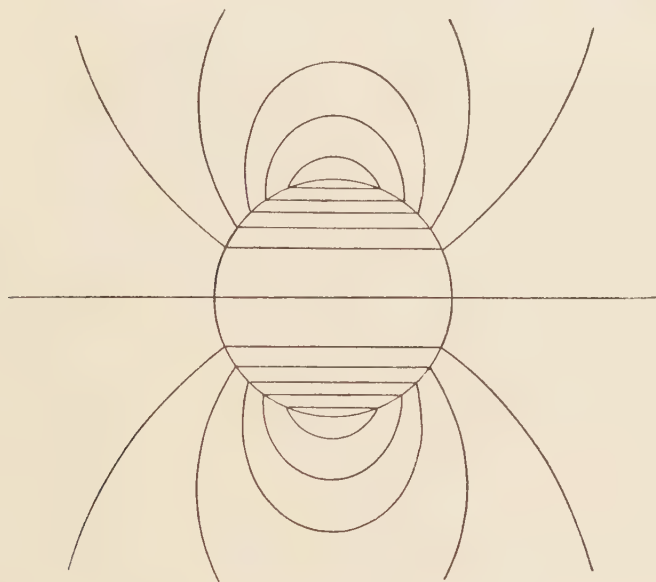


Fig. 7. Feld der fortschreitenden oder der oszillierenden Kugel.

Der Radius einer cylindrischen Röhre, welche den Vektorfluß F führt wird also

$$(b) \quad r = d \sqrt{\frac{2 F d}{\dot{S}}}.$$

In Fig. 7 ist der Radius d der Kugel gleich 1 gesetzt und das Aktionsmoment gleich 12. Der totale Vektorfluß F durch die Äquatorebene der Kugel wird dann nach (a') gleich 6, so daß das ganze Feld durch sechs Vektorröhren darzustellen ist. Die Radien dieser Röhren im Inneren der Kugel findet man nach (b). Die Geraden innerhalb der Kugel in der Figur 7 sind Vektorlinien,

welche die Schnittlinien der coaxialen, einander umschließenden Röhrenmäntel mit einer Meridianebene bilden.

Die Fortsetzung dieser Vektorlinien außerhalb der Kugel findet man mit Hilfe der Konstruktion der Figur 4. Der Schnittpunkt der Geraden mit der Kugel ist ein Punkt auf der Vektorkurve; man konstruiert durch zwei Projektionen den Parameter K dieser Kurve, und nachher beliebig viele Punkte. Die Parameter K kann man übrigens auch leicht durch Integration des Vektorflusses durch die verlängerte Äquatorialebene der Kugel erhalten. Man findet, daß die Parameter der nacheinander folgenden Kurven sich wie die Zahlen

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

verhalten. Ist eine Kurve konstruiert, so kann man die übrigen durch proportionale Verlängerung aller Vektorradien finden.

Dreht sich die so konstruierte Figur um die horizontale Symmetrieachse, so werden die sechs coaxialen in sich zurücklaufenden Stromröhren erzeugt. Wählt man immer kleinere Einheiten des Vektorflusses, so erhält man immer kleinere Vektorröhren und gelangt zuletzt zu der solenoidalen Darstellung des Feldes.

Im Falle eines andauernden Fortschreitens der Kugel wird das System der Solenoide die Bewegung der Kugel mitmachen. Der durch die Solenoide beschriebene Bewegungsgegenstand pflanzt sich dann durch die Flüssigkeit fort, und es sind immer wechselnde Flüssigkeitsmassen, welche die Solenoide füllen. Oscilliert aber die Kugel gradlinig mit hinlänglich kleinen Amplituten, so sind es immer dieselben Flüssigkeitsmassen, welche in einem festliegenden System von Stromröhren hin und her oscillieren.

35. Gleichzeitig volumändernde und fortschreitende Kugel. — Betrachten wir jetzt den Fall, daß die Kugel gleichzeitig die translatorische und die volumändernde Bewegung hat, und drücken wir nach 17(b) die Bewegung durch die vier Parameter a, b, c, d aus, so hat die Kugel die vier Geschwindigkeitskomponenten $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, \dot{d}$.

Die Bewegung im Inneren der Kugel wird dann durch ein Potential dargestellt, welches durch Superposition der Potentiale 18(a) und 30(a₁) entsteht. Also:

$$(a) \quad \Phi = \frac{1}{2} \frac{r^2}{d} \dot{d} + \dot{a}(x - a) + \dot{b}(y - b) + \dot{c}(z - c).$$

Die solenoidal anschließende Bewegung im äußeren Raume finden wir ebenfalls durch Superposition. Denn wegen der linearen

Natur der LAPLACE'schen Gleichung wird die Superposition von zwei Lösungen dieser Gleichung eine neue Lösung derselben geben, und wegen der linearen Natur der Grenzflächenbedingung werden zwei Lösungen, welche die verlangte normale Partialgeschwindigkeiten an der Grenzfläche geben, durch Superposition die verlangte normale Gesamtgeschwindigkeit geben. Das Potential der Bewegung im äusseren Raume erhalten wir also durch Superposition der Potentiale **18(c)** und **30(c₁)** in der Form

$$(b) \quad \varphi = -\frac{d^2}{r}d - \frac{1}{2}\frac{d^3}{r^3}\left\{a(x-a) + b(y-b) + c(z-c)\right\}.$$

Man kann diese Potentialausdrücke in sehr knapper Form als totale Ableitungen der Zeit schreiben. Bemerkt man nämlich, daß die nach **17(d)** in r enthaltenen a, b, c und ebenso d Funktionen der Zeit sind, so findet man¹

$$(a') \quad \Psi = -\frac{d}{2}\frac{d}{dt}\frac{r^2}{d}$$

$$(b') \quad \varphi = -\frac{d}{2}\frac{d}{dt}\frac{d^2}{r}.$$

Das Potential φ des äusseren Feldes in der Umgebung der gleichzeitig volumändernden und fortschreitenden Kugel ist hier durch die vier Geschwindigkeitskomponenten $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, \dot{d}$ ausgedrückt. Wie in den vorhergehenden speziellen Fällen können wir auch die neuen Parameter

$$(c) \quad \dot{e}, \dot{f}, \dot{g}, \dot{h}$$

eingeführen, wo \dot{e} die spezifische Ausdehnungsgeschwindigkeit **19(c)**, $\dot{f}, \dot{g}, \dot{h}$ die Aktionsgeschwindigkeit **33(a)** der fortschreitenden Kugel ist. Oder wir können als Parameter die Produkte

$$(d) \quad \dot{E}, \dot{F}, \dot{G}, \dot{H}$$

der Gröfsen (e) in das Volumen E der Kugel einführen, wo \dot{E} die totale Ausdehnungsgeschwindigkeit **19(b)**, $\dot{F}, \dot{G}, \dot{H}$ die Komponenten des kinematischen Aktionsmomentes **30(b₂)** der Kugel sind. Im letzteren Falle wird der Ausdruck des Potentials

$$(e) \quad \varphi = -\frac{\dot{E}}{4\pi r} - \frac{\dot{F}(x-a) + \dot{G}(y-b) + \dot{H}(z-c)}{4\pi r^3}.$$

¹ C. A. BJERKNES, Om de indre Tilstande i et inkompressibelt ubegrændset Fluidum, hvori en Kugle bevæger sig, idet den forandrer Volum, § 1. Videnskabselskabets Forhandling, Christiania 1863,

Das letzte Glied dieses Ausdruckes ist gleichzeitig das Potential zweier kleiner Kugeln mit entgegengesetzt gleichen Volumänderungsgeschwindigkeiten. Das Gesamtpotential kann deshalb auch als das Potential zweier Kugeln, welche ungleiche Volumänderungsgeschwindigkeiten haben, aufgefaßt werden, so daß \dot{E} der Überschufs an Expansionsgeschwindigkeit der einen Kugel über die Kontraktionsgeschwindigkeit der anderen ist.

36. Das Feld der gleichzeitig fortschreitenden und volumändernden Kugel. — Betrachten wir das äussere und das innere Feld gleichzeitig, so werden sie zusammengekommen weder ein potentiell noch ein solenoidales Gesamtfeld darstellen. Denn das äussere Feld ist allerdings sowohl potentiell, als solenoidal, das innere dagegen ist nur potentiell und nicht solenoidal, und an der Grenzfläche wird nur die solenoidale und nicht die potentielle Grenzflächenbedingung erfüllt. Es liegen mit anderen Worten zwei potentielle Partialfelder vor, von denen das eine zugleich solenoidal ist, und welche durch eine Gleitungs- oder Wirbelschicht voneinander getrennt sind.

Befassen wir uns nur mit dem äusseren Stromfelde, so ist dasselbe wieder am leichtesten zu untersuchen, wenn wir Polarkoordinaten einführen. Das Potential nimmt dann die Form

$$\varphi = -\frac{d^2}{r} d - \frac{1}{2} \frac{d^3}{r^2} \dot{s} \cos \theta = -\frac{\dot{E}}{4\pi r} - \frac{\dot{S} \cos \theta}{4\pi r^2}$$

an. Das Feld ist um die Fortschreitungsrichtung der Kugel als Achse symmetrisch. Die Stromlinien liegen in den durch diese Achse gehenden Meridianebenen, und das Feld läßt sich durch eine Zeichnung in einer solchen Meridianebene vollständig darstellen.

Zu der solenoidalen Darstellung des Feldes durch eine solche Zeichnung kommt man mit Hilfe der schon mehrmals benutzten Superpositionskonstruktion, indem man die Kurven ausserhalb der Kugeln der Figuren 1 und 7 aufeinander legt. In dieser Weise ist die Fig. 8 erhalten. Wenn die Kugel unter Expansion fortschreitet, so werden die beiden Ströme einander vor der Kugel verstärken, und hinter derselben schwächen, und zwar so, daß auf der Symmetrieachse des Feldes ein neutraler Punkt vorkommt, wo die Geschwindigkeit Null ist. Die Geschwindigkeit auf dieser Achse ist nämlich

$$\frac{\dot{E}}{4\pi r^2} + \frac{2\dot{S}}{4\pi r^3},$$

so daß der neutrale Punkt im Abstände

$$r = -2 \frac{\dot{S}}{\dot{E}} = -\frac{\dot{s}}{\dot{d}} d$$

hinter der Kugel liegt. Die durch diesen Punkt passierende Stromlinie ist in der Fig. 8 punktiert. Ist s kleiner als d , so wird dieser Punkt der virtuellen Fortsetzung des äußeren Feldes im Inneren der Kugel angehören. Im unendlich Fernen laufen die Stromlinien in allen Richtungen asymptotisch zu den radialen Strahlen. In

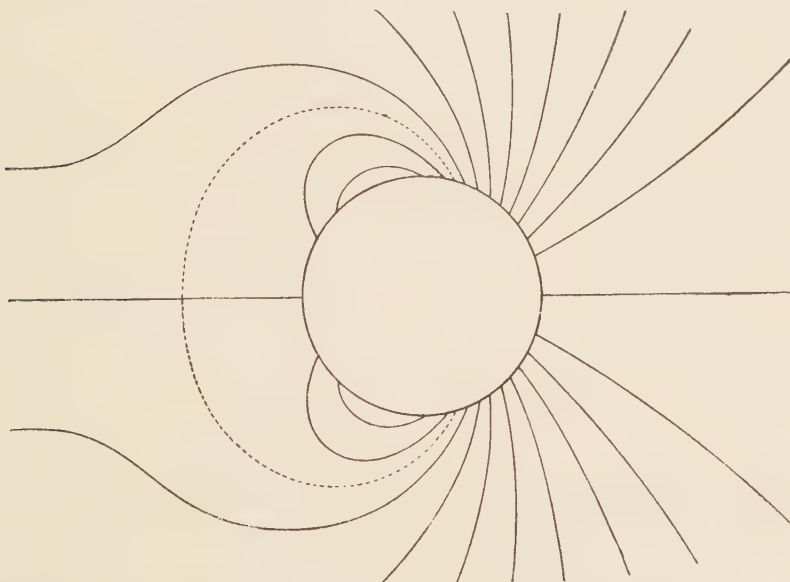


Fig. 8. Feld der unter Expansion fortschreitenden oder der gleichzeitig oszillierenden und pulsierenden Kugel.

der Nähe der Kugel kann also das Fortschreiten der Kugel den Radialstrom stark modificieren; in sehr großen Entfernungen dagegen reduziert sich zuletzt der Strom auf den reinen Radialstrom.

37. Oszillierende und pulsierende Kugel. — Die Figuren 7 und 8 geben Augenblicksbilder der Bewegung der Flüssigkeit in der Umgebung einer mit konstantem, beziehungsweise veränderlichem Volumen fortschreitenden Kugel. Die Symmetrieachse des Feldes fällt immer mit der augenblicklichen Translationsrichtung der Kugel zusammen, und gleichzeitig wird das Aussehen des Feldes sich verändern mit jeder Veränderung der gegenseitigen Intensität der translatorischen und der volumändernden Bewegung.

Wenn aber die Kugel konstanten Volumens mit kleinen Amplituden geradlinig hin- und herschwingt, so kann man die Stromlinien der Fig. 7 als festliegende Kurven betrachten, längs deren die Flüssigkeitspartikelchen mit kleinen Amplituden schwingen. Hat die oscillierende Kugel veränderliches Volumen, und verlaufen die Volumänderungen nach einem anderen Gesetze als die Oscillationen, so wird man wieder wechselnde Strombilder haben, wobei der neutrale Punkt der Fig. 8 bald vor und bald hinter der Kugel liegen wird. Sind aber die Pulsationen mit den Oscillationen synchron, so daß beispielsweise die Ausdehnung immer mit dem Fortschreiten, und die Zusammenziehung immer mit der Rückkehr der Kugel zusammenfällt, so werden die Kurven der Fig. 8 wieder festliegend, und die Flüssigkeitsbewegung reduciert sich auf geradlinige Oscillationen der Flüssigkeitspartikelchen längs der Linienelemente dieses festliegenden Kurvensystems. Die beiden entgegengesetzt volumändernden Kugeln, durch welche man immer die eine volumändernde und fortschreitende Kugel ersetzen kann (35), sind in diesem Falle synchron pulsierende Kugeln.

Dritter Abschnitt.

Allgemeines über die Bewegung des Kugelsystems und die anschließende Bewegung der Flüssigkeit.

38. Potential des Kugelsystems in der ersten Annäherung. — Befindet sich in der Flüssigkeit eine beliebige Anzahl n von Kugeln g, h, i, j, k, \dots , die gleichzeitig translatorische und volumändernde Bewegungen haben, und sind alle Centraldistanzen groß im Vergleich zu den Radien der Kugeln, so kann das Potential der Flüssigkeitsbewegung in der ersten Annäherung einfach durch Superposition gefunden werden:

$$(a) \quad \varphi = \sum_1^n \varphi_g,$$

wo φ_g das Potential der Kugel g darstellt, wenn sie allein vorhanden wäre, nämlich nach 35 (b)

$$(b) \quad \varphi_g = -\frac{a_g^2}{r_g} \dot{a}_g - \frac{1}{2} \frac{a_g^3}{r_g^3} \left\{ \dot{a}_g (x - a_g) + \dot{b}_g (y - b_g) + \dot{c}_g (z - c_g) \right\}$$

oder unter Anwendung der anderen Parameter, wie in 35(e),

$$(c) \quad \varphi_g = -\frac{\dot{E}_g}{4\pi r_g} - \frac{\dot{F}_g(x - a_g) + \dot{G}_g(y - b_g) + \dot{H}_g(z - c_g)}{4\pi r_g^3}.$$

Die Begründung ist schon in 23 gegeben. Der Umstand, daß die Kugeln jetzt auch translatorische Bewegung haben, ändert dabei nichts. Denn die auf der Translation beruhende Bewegung in der Flüssigkeit nimmt noch schneller als die auf der Volumänderung beruhende mit der Entfernung ab, und die von der Translation herrührenden Fehler in der Erfüllung der Grenzflächenbedingung kommen deshalb nicht in Betracht, weil wir schon die von der Volumänderung herrührenden Fehler als verschwindend klein betrachten.

Zur Orientierung über die Natur der Flüssigkeitsbewegung und zum Vergleich der theoretisch und experimentell gefundenen Stromfelder können wir uns deshalb dieser Lösung bedienen, während wir später, um den dynamischen Teil unserer Aufgabe erledigen zu können, eine genauere Lösung suchen müssen.

Die allgemeine Natur der durch (a) dargestellten Flüssigkeitsbewegung wird man in den einfachsten Specialfällen mit Hilfe der schon gezeichneten Felder voraussehen können. Dabei ist es oft zweckmäßig, die fortschreitende Kugel durch ein volumänderndes Kugelpaar ersetzt zu denken.

39. Abhängigkeit des exakten Potentialausdruckes von den kinematischen Parametern. — Die angenäherte Lösung 38(a) ist eine lineare und homogene Funktion der $4n$ kinematischen Parameter $\dot{a}_g, \dot{b}_g, \dot{c}_g, \dot{d}_g, \dots$, während die Koeffizienten Funktionen der geometrischen Parameter $a_g, b_g, c_g, d_g, \dots$ sind.

Dieselbe Eigenschaft wird der exakte Potentialausdruck haben, wie man leicht aus den allgemeinen Bedingungen des Problems erkennt. Um dies zu beweisen, denken wir uns erst eine Funktion φ gegeben, welche die LAPLACE'sche Gleichung erfüllt, im unendlich Fernen verschwindet, und die durch $\dot{a}_g, \dot{b}_g, \dot{c}_g, \dot{d}_g, \dots$ bestimmten Normalgeschwindigkeiten an allen Kugelflächen hat. Nachher denken wir uns, daß jeder Geschwindigkeitskomponente der m -fache Wert $m\dot{a}_g, m\dot{b}_g, m\dot{c}_g, m\dot{d}_g, \dots$ gegeben werde. Wegen der linearen Natur der LAPLACE'schen Gleichung sowie der Grenzflächenbedingung erkennt man sofort, daß $m\varphi$ die Lösung des neuen Problems darstellt. Mit anderen Worten, φ ist eine lineare und homogene Funktion der kinematischen Parameter.

Wir können deshalb immer φ in der Form:

$$(a) \quad \varphi = \sum_1^n (A_g \dot{a}_g + B_g \dot{b}_g + C_g \dot{c}_g + D_g \dot{d}_g)$$

schreiben, wo A_g, B_g, C_g, D_g Funktionen der $4n$ geometrischen Parameter a_g, b_g, c_g, d_g sind.

Da die Koordinaten x, y, z des Raumpunktes nur in die Funktionen A_g, B_g, C_g, D_g eingehen, finden wir für die Geschwindigkeitskomponenten in der Flüssigkeit:

$$(b) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \sum_1^n \left\{ \frac{\partial A_g}{\partial x} \dot{a}_g + \frac{\partial B_g}{\partial x} \dot{b}_g + \frac{\partial C_g}{\partial x} \dot{c}_g + \frac{\partial D_g}{\partial x} \dot{d}_g \right\} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \sum_1^n \left\{ \frac{\partial A_g}{\partial y} \dot{a}_g + \frac{\partial B_g}{\partial y} \dot{b}_g + \frac{\partial C_g}{\partial y} \dot{c}_g + \frac{\partial D_g}{\partial y} \dot{d}_g \right\} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &+ \sum_1^n \left\{ \frac{\partial A_g}{\partial z} \dot{a}_g + \frac{\partial B_g}{\partial z} \dot{b}_g + \frac{\partial C_g}{\partial z} \dot{c}_g + \frac{\partial D_g}{\partial z} \dot{d}_g \right\}. \end{aligned}$$

Diese treten also auch als homogene, lineare Funktionen auf, und ähnlich wird es sich mit sämtlichen höheren Ableitungen des Potentials verhalten. Also:

Das Geschwindigkeitspotential für die Bewegung der Flüssigkeit, sowie seine sämtlichen Ableitungen nach den Koordinaten sind lineare und homogene Funktionen der Geschwindigkeitskomponenten $\dot{a}_g, \dot{b}_g, \dot{c}_g, \dot{d}_g$ der Kugeln.¹

40. Abhängigkeit des Potentials von den geometrischen Parametern. — Jede der Funktionen A_g, B_g, C_g, D_g müssen wir im allgemeinen als von sämtlichen $4n$ geometrischen Parametern $a_g, b_g, c_g, d_g, a_h, b_h, c_h, d_h, \dots$ abhängig annehmen, während speziell in dem angenäherten Ausdruck 38 (a) nur die vier Parameter a_g, b_g, c_g, d_g der Kugel g selbst eintreten.

Es läßt sich aber sofort ein allgemeiner Schluß darüber ziehen, in welcher Weise die Parameter in diese Funktionen eingehen werden. Die Kugelradien d_g, d_h, \dots müssen mit ihren absoluten Werten auftreten, weil dieselben wesentliche Bestimmungsstücke für

¹ C. A. BJERKNES, Sur le mouvement simultané de corps sphériques variables dans un fluide indéfini et incompressible, § 2. Videnskabselskabets Forhandling. Christiania 1871.

die Konfiguration des Kugelsystems sind. Anders verhält es sich mit den Koordinaten $a_g, b_g, c_g, a_h, b_h, c_h, \dots$ der Mittelpunkte der Kugeln. Offenbar wird das Potential im Raumpunkte x, y, z nur von der Lage der Kugeln relativ zu einander und von der Lage des ganzen Kugelsystems relativ zu diesem Punkte abhängen. Denn die absolute Lage der einzelnen Kugeln kann keine Bedeutung haben, wie man sofort sieht, wenn man sich das ganze Kugelsystem und den Punkt x, y, z als ein starres System verschoben denkt. Also:

In den Funktionen $A_g, \dots D_g$ wird der Parameter d_g mit seinem absoluten Werte, die Parameter $a_g, b_g, c_g, a_h, b_h, c_h, \dots$ dagegen werden nur in Differenzen von der Form

$$(a) \quad x - a_g, y - b_g, z - c_g, \quad a_h - a_g, b_h - b_g, c_h - c_g, \dots$$

vorkommen.

Im angenäherten Potentialausdrucke 38(a) tritt nur $x - a_g, y - b_g, z - c_g$, also die Lage der Kugel relativ zum Raumpunkte x, y, z auf, während $a_h - a_g, b_h - b_g, c_h - c_g$, oder die Lage der Kugel g relativ zu einer beliebigen anderen Kugel h , erst bei fortgesetzter Approximation auftreten wird.

41. Sichtbare und verborgene Bewegung des Kugelsystems. —

Im Anschluß an diese allgemeinen Sätze über die Art und Weise, wie die geometrischen und die kinematischen Parameter im Potentialausdrucke auftreten, können wir gewisse besondere Bewegungsformen des Kugelsystems und gewisse allgemeine Eigenschaften der anschließenden Flüssigkeitsbewegung diskutieren.

Wir zerlegen sämtliche geometrischen Parameter in zwei Teile:

$$(a) \quad a_g = a_g^0 + a_g^1, \quad b_g = b_g^0 + b_g^1, \quad c_g = c_g^0 + c_g^1, \quad d_g = d_g^0 + d_g^1.$$

Eine für unsere Untersuchungen besonders wichtige Bewegungsform des Kugelsystems läßt sich dann dadurch definieren, daß wir die folgenden Voraussetzungen machen:

d_g^0 soll immer eine Konstante sein.

a_g^0, b_g^0, c_g^0 sollen sich in der Zeit nur sehr langsam verändern, im Verlaufe der Zeit sollen aber die Änderungen beliebig groß werden können.

$a_g^1, b_g^1, c_g^1, d_g^1$ sollen dagegen schnell veränderlich sein, aber nur innerhalb sehr enger Grenzen, so daß sie immer klein bleiben im Vergleich zu den Radien d_g der einzelnen Kugeln.

Differentiieren wir die Gleichungen (a) nach der Zeit, so ergibt sich

$$(b) \quad \dot{a}_g = \dot{a}_g^0 + \dot{a}_g^1, \quad \dot{b}_g = \dot{b}_g^0 + \dot{b}_g^1, \quad \dot{c}_g = \dot{c}_g^0 + \dot{c}_g^1, \quad \dot{d}_g = \dot{d}_g^1,$$

wo also nach den Voraussetzungen die Geschwindigkeiten $\dot{a}_g^0, \dot{b}_g^0, \dot{c}_g^0$ klein sind im Vergleiche zu den Geschwindigkeiten $\dot{a}_g^1, \dot{b}_g^1, \dot{c}_g^1, \dot{d}_g^1$. Wie groß aber auch diese letzteren Geschwindigkeiten sein mögen, wegen der Kleinheit der entsprechenden Verschiebungen a_g^1, \dots, d_g^1 werden sie keine merkbaren Konfigurationsveränderungen des Systems erzeugen. Diese vielleicht äußerst intensive Partialbewegung kann sich deshalb vollständig der Beobachtung entziehen. Die durch die Größen a_g^0, b_g^0, c_g^0 beschriebene, und mit den langsamen Geschwindigkeiten $\dot{a}_g^0, \dot{b}_g^0, \dot{c}_g^0$ verlaufende Partialbewegung wird sich dagegen durch die fortschreitende Konfigurations- und Lageveränderung des Systems immer bemerkbar machen. Mit Rücksicht hierauf können wir a_g^0, \dots, d_g^0 die Parameter der äußeren oder sichtbaren Konfiguration und $\dot{a}_g^0, \dot{b}_g^0, \dot{c}_g^0$ die Geschwindigkeitskomponenten der sichtbaren Bewegung nennen, und im Gegensatze dazu a_g^1, \dots, d_g^1 als die Koordinaten der inneren Konfiguration und $\dot{a}_g^1, \dots, \dot{d}_g^1$ als die Geschwindigkeitskomponenten der inneren oder verborgenen Bewegung bezeichnen.

Sind besonders die Parameter der äußeren Konfiguration von der Zeit unabhängig, so kommen keine fortschreitenden Konfigurations- und Lageänderungen vor, und man wird glauben, ein System im Gleichgewichte vor sich zu haben. Einen solchen Bewegungszustand, welcher wegen der beschränkten Genauigkeit unserer Beobachtungen mit einem statischen Zustande verwechselt wird, werden wir einen scheinbar statischen Bewegungszustand nennen.

42. Vereinfachung des Potentials bei intensiven verborgenen und schwachen sichtbaren Bewegungen. — Die allgemeinen Ausdrücke 41 (a) der Parameter können wir in die Funktionen A_g, \dots, D_g substituieren, und nach Potenzen der kleinen Größen a_g^1, \dots, d_g^1 entwickeln, da dieselben im allgemeinen klein sind, im Vergleiche zu den als Variablen auftretenden Größen $d_g, x - a_g, \dots, \alpha_h - a_g, \dots$. Daß auch die letzteren Größen ausnahmsweise wegen der Lage des Koordinatensystems klein oder Null werden können, hat dabei keine Bedeutung. Wenn wir nur die konstanten Glieder der Entwicklungen beibehalten, so ergibt sich in der ersten Annäherung:

$$(a) \quad A_g = A_g^0, \quad B_g = B_g^0, \quad C_g = C_g^0, \quad D_g = D_g^0,$$

wo $A_g^0, \dots D_g^0$ nur von den Koordinaten der äusseren Konfiguration, das heisst von den Grössen $d_g^0, x - a_g^0, y - b_g^0, z - c_g^0, a_h^0 - a_g^0, b_h^0 - b_g^0, c_h^0 - c_g^0, \dots$ abhängen.

Gleichzeitig können wir in der ersten Annäherung

$$(b) \quad \dot{a}_g = \dot{a}_g^1, \quad \dot{b}_g = \dot{b}_g^1, \quad \dot{c}_g = \dot{c}_g^1, \quad \dot{d}_g = \dot{d}_g^1$$

setzen, also

$$(c) \quad \varphi = \sum_g^n \left\{ A_g^0 \dot{a}_g^1 + B_g^0 \dot{b}_g^1 + C_g^0 \dot{c}_g^1 + D_g^0 \dot{d}_g^1 \right\}$$

schreiben. Wir schliessen daher, dass in diesem Falle der Potentialausdruck in erster Annäherung nur von den Parametern der äusseren Konfiguration und von den Geschwindigkeiten der inneren Bewegung abhängig ist, und dasselbe wird mit sämtlichen Ableitungen des Potentials nach den Koordinaten der Fall sein, also beispielsweise mit den Geschwindigkeitskomponenten in der Flüssigkeit. Nur wenn Differentiationen nach der Zeit vorgenommen werden sollen, müssen wir immer zu dem ursprünglichen Potentialausdruck zurückkehren.

Wenn wir aber diese Vereinfachung benutzen wollen, so ist es nicht notwendig, neue Bezeichnungen einzuführen, da der Form nach der Potentialausdruck φ^0 vollkommen mit dem ursprünglichen φ übereinstimmt. In allen Fällen, wo nicht eine Differentiation nach der Zeit vorgenommen werden soll, können wir uns also der folgenden Regel bedienen:

Liegt ein Bewegungszustand mit schwacher äusserer und intensiver innerer Bewegung vor, so kann man in der ersten Annäherung das Geschwindigkeitspotential der Flüssigkeit und sämtliche Ableitungen desselben nach den Koordinaten als Funktionen der Parameter der äusseren Konfiguration und der Geschwindigkeiten der inneren Bewegung betrachten.

43. Mechanik der verborgenen Bewegungen. — Auf den mechanischen Ursprung der verborgenen Bewegungen werden wir nicht genauer eingehen. Wir begnügen uns, die mechanische Möglichkeit dieser Bewegungen anzudeuten.

Wir haben schon früher die Zurückführbarkeit der periodischen Volumveränderungen oder Pulsationen auf die Elasticität der Kugeln angedeutet (22).

Die translatorischen Schwingungen oder Oscillationen können auch auf inneren elastischen Kräften beruhen. Man erkennt dieses

leicht, wenn man sich denkt, daß jede Kugel aus einer Kugelschale besteht, welche in elastischer Verbindung mit einem inneren schweren Kern steht. Der innere Kern und die äußere Schale können dann entgegengesetzte Schwingungen um den gemeinschaftlichen, ruhenden Schwerpunkt ausführen, und in ähnlicher Weise wird auch eine als elastisches Kontinuum gedachte Kugel schwingen können.

Sonst können die Oscillationen der Kugeln auch auf äußeren elastischen Verbindungen beruhen, durch welche mehrere Kugeln zu Gruppen zusammengehalten werden. Eine solche Kugelgruppe kann sich dann als ein Ganzes bewegen, während die einzelnen Kugeln gleichzeitig kleine Schwingungen ausführen. Dabei sei immer vorausgesetzt, daß diese Verbindungen hinlänglich fein sind, um die Flüssigkeitsbewegungen nicht zu stören.

Wie aber auch die Mechanismen beschaffen seien, auf welchen die Oscillationen wirklich beruhen, so können wir immer die Hilfsvorstellung benutzen, daß die Kugeln unter der Wirkung fremder Kräfte beliebigen Ursprunges stehen, die sich in den mittleren Lagen $a_g^0, b_g^0, c_g^0, \dots$ das Gleichgewicht halten. Diese Gleichgewichtslagen können wieder langsam veränderlich sein. Die Frage von dem Ursprunge der Schwingungen ist damit vollkommen offen gehalten, und wir entnehmen der gewöhnlichen Theorie der kleinen Schwingungen nur die folgende allgemeine Eigenschaft der Parameter der inneren Konfiguration a_g^1, \dots, d_g^1 , welche die Schwingungen beschreiben:

Jeder Parameter der inneren Konfiguration läßt sich durch eine Summe von periodischen Funktionen darstellen.

Diese Voraussetzung braucht nicht zu jeder Zeit streng erfüllt zu sein. Mit der progressiven Veränderung der äußeren Konfiguration dürfen auch progressive Veränderungen im inneren Schwingungszustande verbunden sein. Wir beschränken aber unsere Betrachtungen auf kurze Zeiträume, während welcher diese progressiven Veränderungen unmerkbar sind.

44. Die Mittelwerte der Geschwindigkeiten. — Sind in dieser Weise die Parameter der inneren Konfiguration aus lauter periodischen Funktionen linear zusammengesetzt, so werden die entsprechenden inneren Geschwindigkeiten lineare Verbindungen aus Zeitableitungen periodischer Funktionen sein, deren jede nach dem Satze 21(A) den Mittelwert Null hat. Nehmen wir danach den Mittelwert der wirklichen Geschwindigkeiten 41(b) während einer Zeit, die so kurz ist, daß die Geschwindigkeiten $\dot{a}_g^0, \dots, \dot{d}_g^0$ keine merkbare

Änderung erleiden, welche aber doch gleichzeitig lang ist im Ver-
gleiche zu den Perioden der kleinen Schwingungen, so verschwinden
die Mittelwerte von $a_g^1, \dots c_g^1$ und wir erhalten:

*Die linearen Mittelwerte der wirklichen Geschwindigkeiten sind mit
den Geschwindigkeiten der äusseren, sichtbaren Bewegung identisch.*

Bilden wir andererseits die quadratischen Mittelwerte der Ge-
schwindigkeiten, während eines Zeitraumes derselben Länge, so wird
der Beitrag der schwachen äusseren Geschwindigkeiten verschwindend
und wir erhalten:

*Die quadratischen Mittelwerte der wirklichen Geschwindigkeiten können
in der ersten Annäherung als mit den quadratischen Mittelwerten der
inneren verborgenen Geschwindigkeiten identisch betrachtet werden.*

45. Isochrone Schwingungen. — Wir haben schon in einzelnen
Fällen, **24** und **37**, gesehen, wie die Stromlinien in der Flüssigkeit
unaufhörlich in Bewegung sind, wenn die einzelnen Komponent-
bewegungen einer Kugel, oder die Bewegungen mehrerer Kugeln
nach voneinander unabhängigen Gesetzen periodisch oder nicht-
periodisch verlaufen. Dies wird sich natürlich bei einem vollständi-
gen Kugelsysteme wiederholen, nur mit gröfserer Mannigfaltigkeit
der aufeinander folgenden Strombilder.

Sind die einzelnen Parameter nicht mehr voneinander ver-
schiedene Summen von periodischen Funktionen, sondern alle durch
eine einzige periodische Funktion darstellbar, so werden wir die
Schwingungen isochron nennen. Die verschiedenen Parameter
haben dann alle dieselbe Periode, und können sich voneinander
nur durch Amplitude und Phase unterscheiden. Es sei $f(t)$ diese
Funktion, durch die alle Parameter der inneren Konfiguration dar-
stellbar sind, τ die Periode derselben, und $\alpha_g, \beta_g, \gamma_g, \delta_g, \alpha_h, \beta_h, \dots$
seien Zahlen zwischen 0 und 1. Die Parameter der inneren Kon-
figuration sind dann den Funktionen $f(t - \alpha_g \tau), f(t - \beta_g \tau), \dots$
 $f(t - \alpha_h \tau), \dots$ proportional. Von den Proportionalitätsfaktoren
hängen die Amplituden, von den Differenzen der Zahlen α_g, β_g, \dots
 α_h, β_h, \dots die Phasenunterschiede ab.

Die inneren Geschwindigkeiten sind den Zeitableitungen
 $f'(t - \alpha \tau), \dots$ proportional, wo f' nach **21(A)** eine Funktion ist,
welche den linearen Mittelwert Null hat. Ohne die Natur der Be-
wegung zu beschränken, können wir wie früher (25) annehmen, dafs
der quadratische Mittelwert von f' den numerischen Wert 1
hat, und daher die Geschwindigkeiten der inneren Bewegung in
der Form

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \dot{a}_g^1 = \dot{a}_g^m f'(t - \alpha_g \tau) & \dot{a}_h^1 = \dot{a}_h^m f'(t - \alpha_h \tau) & \dots\dots\dots \\
 & \dot{b}_g^1 = \dot{b}_g^m f'(t - \beta_g \tau) & \dot{b}_h^1 = \dot{b}_h^m f'(t - \beta_h \tau) & \dots\dots\dots \\
 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots &
 \end{aligned}$$

schreiben, wo $\dot{a}_g^m, \dot{b}_g^m, \dots\dots \dot{a}_h^m, \dot{b}_h^m$ die nach 21(b) bestimmten quadratischen Mittelwerte von $\dot{a}_g^1, \dot{b}_g^1, \dot{c}_g^1, \dot{a}_h^1, \dot{b}_h^1, \dots\dots$ sind.

Wie sehr aber auch die Bewegung der Flüssigkeit sich vereinfacht bei der Annahme dieser Bewegung des Kugelsystems, werden doch bei Phasenunterschied im allgemeinen die Strombilder wechselndes Aussehen haben. Man braucht sich nur den Fall zweier mit dem Gangunterschiede von ein Viertel Phase nach einfachen Sinusgesetzen pulsierenden Kugeln zu versinnlichen. Man wird dann die Periode in vier Teile teilen können: in zwei derselben ist eine Kugel expandierend und eine kontrahierend, in den zwei anderen sind entweder beide expandierend oder beide kontrahierend. Man wird also in jeder Periode sowohl die Strombilder der Figuren 2 und 3 als alle zwischenliegenden erhalten.

46. Synchrone Schwingungen. — Die isochronen Schwingungen werden wir synchron nennen, wenn keine Phasenunterschiede mehr vorliegen. Hat f die Symmetrieeigenschaft, daß

$$f(t + \tfrac{1}{2}\tau) = -f(t),$$

so können wir nach Veränderung des Vorzeichens der Amplitude von jedem Phasenunterschiede, welcher eine halbe Periode beträgt, absehen. Schwingungen gleicher oder entgegengesetzter Phase, welche diese Symmetrieeigenschaft besitzen, werden deshalb auch zu den synchronen gerechnet, und zwar können wir in allen Fällen als Bedingung für synchrone Schwingungen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \dot{a}_g^1 = \dot{a}_g^m f'(t) & \dot{a}_h^1 = \dot{a}_h^m f'(t) & \dots\dots\dots \\
 & \dot{b}_g^1 = \dot{b}_g^m f'(t) & \dot{b}_h^1 = \dot{b}_h^m f'(t) & \dots\dots\dots \\
 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots &
 \end{aligned}$$

aufstellen, wo die als Amplitude auftretenden Größen die nach der Formel 21(b) gebildeten und nach der Regel 21(B) mit Vorzeichen versehenen quadratischen Mittelwerten sind.

Substituieren wir diese Ausdrücke im Potentialausdruck 42(c), so ergibt sich

$$(b) \quad \varphi = f(t) \sum_1^n \left\{ A_g^0 \dot{a}_g^m + B_g^0 \dot{b}_g^m + C_g^0 \dot{c}_g^m + D_g^0 \dot{d}_g^m \right\},$$

wo der Klammerausdruck als von der Zeit unabhängig betrachtet werden kann, wenn wir von den langsam verlaufenden sichtbaren Bewegungen absehen.

Bezeichnen wir die von der Zeit unabhängige oder in der Zeit nur langsam veränderliche Gröfse durch

$$(c) \quad \varphi^m = \sum_1^n \left\{ A_g^0 \dot{a}_g^m + B_g^0 \dot{b}_g^m + C_g^0 \dot{c}_g^m + D_g^0 \dot{d}_g^m \right\},$$

so wird der Potentialausdruck

$$(d) \quad \varphi = f(t) \cdot \varphi^m.$$

Die Geschwindigkeitskomponenten werden

$$(e) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f(t) \frac{\partial \varphi^m}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f(t) \frac{\partial \varphi^m}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = f(t) \frac{\partial \varphi^m}{\partial z},$$

und ähnliche Ausdrücke findet man für die höheren Ableitungen.

Im Falle synchroner Schwingungen zerlegt sich also das Geschwindigkeitspotential in ein Produkt von zwei Faktoren, deren der eine $f(t)$ den Verlauf der kleinen Schwingungen in der Zeit angiebt, während der andere φ^m die in der Zeit unveränderliche, oder wenigstens nur langsam veränderliche geometrische Verteilung der Bewegung beschreibt. In ganz ähnlicher Weise zerlegen sich sämtliche Ableitungen des Potentials nach den Koordinaten.

Wenn wir von Einzelheiten im zeitlichen Verlauf der Bewegung absehen und nur die dauernden räumlichen Eigenschaften derselben untersuchen wollen, können wir also im Falle synchroner Schwingungen die Funktion φ^m zu Grunde legen in ganz ähnlicher Weise, wie wir das gewöhnliche Potential φ benutzen, um den augenblicklich vorliegenden Bewegungszustand zu untersuchen. φ^m werden wir deshalb das Potential des synchronen Schwingungszustandes nennen.

Man bemerkt übrigens, daß dieses Potential φ^m und seine Ableitungen nach den Koordinaten einfach die nach 21 definierten und mit Vorzeichen versehenen quadratischen Mittelwerte des Potentials φ der wirklichen Bewegung und der betreffenden Ableitungen desselben sind.

47. Die Stromfelder im Falle synchroner Schwingungen. — Dafs die geometrischen Eigenschaften des Feldes nur von φ^m abhängen, erkennt man sofort, wenn man die Gleichungen der Stromlinien bildet. Denn substituiert man die Geschwindigkeitskomponenten 46 (e) in den Differentialgleichungen 2 (a) der Vektorkurven, so fällt der gemeinschaftliche Faktor $f(t)$ fort. Die Differentialgleichungen werden einfach

$$(a) \quad \frac{dx}{\frac{\partial \varphi^m}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial \varphi^m}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial \varphi^m}{\partial z}},$$

so dafs die Stromlinien nur von φ^m und den darin enthaltenen Konstanten oder langsam veränderlichen Parametern abhängen. Wir kommen also ganz allgemein zu dem Resultat, welchem wir früher (25 und 37) in besonderen Fällen begegnet sind:

Im Falle synchroner Schwingungen des Kugelsystems wird der Bewegungszustand der Flüssigkeit durch ein einziges Strombild dargestellt, welches nur langsam mit den progressiven äufseren Konfigurationsänderungen des Kugelsystems Veränderungen erleiden kann.

Wegen dieser Eigenschaft kann man sich einer einzigen Zeichnung zur solenoidalen Darstellung des Bewegungszustandes bedienen. Als Vektorfluß rechnet man dann den mit Vorzeichen versehenen quadratischen Mittelwert des Flächenintegrals der Geschwindigkeit, welcher mit dem Flusse des Vektors

$$\frac{\partial \varphi^m}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi^m}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi^m}{\partial z}$$

identisch ist.

Da wir sehr oft den besonderen Fall synchroner Schwingungen betrachten werden, wird es nützlich sein, nach einer bequemen Regel von der Betrachtung eines beliebigen augenblicklichen Bewegungszustandes zu der speziellen Betrachtung synchroner Schwingungen übergehen zu können. Diese Regel läßt sich auf der formellen Ähnlichkeit des Potentials φ^m des synchronen Schwingungszustandes, 46 (c), mit dem Potential φ der wirklichen Bewegung, 39 (a), begründen. Denn halten wir diese formelle Ähnlichkeit fest, und erinnern uns daran, wie wir aus φ das φ^m gebildet haben, so läßt sich unmittelbar die folgende Regel aufstellen:

Das Potential der wirklichen Bewegung kann auch als Potential des synchronen Schwingungszustandes dienen, wenn wir nämlich die eingehenden geometrischen Parameter als lineare und die eingehenden kinematischen Parameter als quadratische Mittelwerte mit Vorzeichen nach der Regel 21 (B) interpretieren.

48. Die Verwendung anderer kinematischer Parameter. — Oben haben wir durchgehend die linearen Geschwindigkeitskomponenten $\dot{a}_g, \dots \dot{d}_g$ als kinematische Parameter verwendet. Alle Sätze werden aber ihre Gültigkeit auch dann behalten, wenn wir die linearen Geschwindigkeitskomponenten durch die Volumänderungsgeschwindigkeit \dot{E}_g und die Komponenten des Aktionsmomentes $\dot{F}_g, \dot{G}_g, \dot{H}_g$ ersetzen, vorausgesetzt, daß die schon gestellte Bedingung immer erfüllt bleibt, wonach die Volumänderungen der Kugeln immer klein im Vergleiche zu ihrem Volum bleiben sollen.

Denn ist der Radius d einer Kugel immer von dem Mittelwerte d_0 wenig verschieden, so können wir ohne merklichen Fehler in der Formel 19 (b) d durch d_0 ersetzen, und also angenähert

$$(a) \quad \dot{E} = 4 \pi d_0^2 \dot{d}$$

schreiben. Da weiter das Volumen E von dem Mittelwerte E_0 sehr wenig abweicht, können wir die exakten Formeln 30 (b₃) durch die angenäherten

$$(b) \quad \dot{F} = \frac{3}{2} \dot{E}_0 a, \quad \dot{G} = \frac{3}{2} \dot{E}_0 b, \quad \dot{H} = \frac{3}{2} \dot{E}_0 c$$

ersetzen.

Im Falle kleiner Schwingungen ist also die Volumausdehnungsgeschwindigkeit der linearen Radialgeschwindigkeit proportional. Ebenso ist das Aktionsmoment der linearen Translationsgeschwindigkeit proportional, und zwar so, daß der Proportionalitätsfaktor eine von der Zeit unabhängige GröÙe ist. Dieselbe Proportionalität muß folglich unter den quadratischen Mittelwerten bestehen, so daß in den vorhergehenden Sätzen Volumausdehnungsgeschwindigkeit und Aktionsmoment ohne weiteres die linearen Geschwindigkeiten ersetzen können.

49. Die Bahnen der Flüssigkeitspartikelchen. — Es ist noch von Interesse zu bemerken, daß man die Bahnen der einzelnen Flüssigkeitspartikelchen bestimmen kann, wenn sich die Bewegung des Kugelsystems auf kleine Schwingungen reduziert.

Es mögen α, β, γ die Koordinaten eines Flüssigkeitspartikelchen zu einer beliebigen Zeit t und $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ die Werte derselben zur Anfangszeit t_0 darstellen. Wenn weiter $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ die Geschwindigkeitskomponenten des Partikelchens sind, so wird die Bahn durch die Gleichungen

$$(a) \quad \dot{\alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \dot{\beta} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \dot{\gamma} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

bestimmt. Die hier auftretenden x, y, z sind die Koordinaten des geometrischen Punktes, in dem sich zu der betrachteten Zeit t das Partikelchen befindet. Nach vollführter Differentiation können wir also diese Größen einfach durch die Substitution $x = \alpha, y = \beta, z = \gamma$ eliminieren.

Im Falle intensiver verborgener Schwingungen sind wir aber nach 42 berechtigt, die geometrischen Parameter $a_g, \dots d_g, \dots$, die nur in den Verbindungen 40(a) auftreten, durch die von der Zeit unabhängigen Mittelwerte $a_g^0, \dots d_g^0, \dots$ zu ersetzen. Jetzt sind aber α, β, γ in ebenso enge oder noch engere Grenzen eingeschlossen als $a_g, \dots d_g, \dots$. Die mit α, β, γ zu identifizierenden x, y, z , die auch nur in den Verbindungen 40(a) auftreten, können deshalb sofort mit den Konstanten $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ identifiziert werden. Denken wir uns diese Substitution ausgeführt, so lassen sich die Gleichungen (a) in folgender Weise explicite schreiben:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \sum_1^n \left\{ \frac{\partial A_g^0}{\partial \alpha_0} \dot{a}_g + \frac{\partial B_g^0}{\partial \alpha_0} \dot{b}_g + \frac{\partial C_g^0}{\partial \alpha_0} \dot{c}_g + \frac{\partial D_g^0}{\partial \alpha_0} \dot{d}_g \right\} \\ (b) \quad \dot{\beta} &= \sum_1^n \left\{ \frac{\partial A_g^0}{\partial \beta_0} \dot{a}_g + \frac{\partial B_g^0}{\partial \beta_0} \dot{b}_g + \frac{\partial C_g^0}{\partial \beta_0} \dot{c}_g + \frac{\partial D_g^0}{\partial \beta_0} \dot{d}_g \right\} \\ \dot{\gamma} &= \sum_1^n \left\{ \frac{\partial A_g^0}{\partial \gamma_0} \dot{a}_g + \frac{\partial B_g^0}{\partial \gamma_0} \dot{b}_g + \frac{\partial C_g^0}{\partial \gamma_0} \dot{c}_g + \frac{\partial D_g^0}{\partial \gamma_0} \dot{d}_g \right\}. \end{aligned}$$

Die hier als Koeffizienten von $\dot{a}_g, \dot{b}_g, \dot{c}_g, \dot{d}_g$ auftretenden Größen sind von der Zeit unabhängig, so daß wir unmittelbar integrieren können. Erinnern wir uns dabei an die Anfangsbedingungen, so ergeben sich für die Bahnen der Flüssigkeitspartikelchen:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \sum_1^n \left\{ \frac{\partial A_g^0}{\partial \alpha_0} a_g + \frac{\partial B_g^0}{\partial \alpha_0} b_g + \frac{\partial C_g^0}{\partial \alpha_0} c_g + \frac{\partial D_g^0}{\partial \alpha_0} d_g \right\} \\ (c) \quad \beta &= \beta_0 + \sum_1^n \left\{ \frac{\partial A_g^0}{\partial \beta_0} a_g + \frac{\partial B_g^0}{\partial \beta_0} b_g + \frac{\partial C_g^0}{\partial \beta_0} c_g + \frac{\partial D_g^0}{\partial \beta_0} d_g \right\} \\ \gamma &= \gamma_0 + \sum_1^n \left\{ \frac{\partial A_g^0}{\partial \gamma_0} a_g + \frac{\partial B_g^0}{\partial \gamma_0} b_g + \frac{\partial C_g^0}{\partial \gamma_0} c_g + \frac{\partial D_g^0}{\partial \gamma_0} d_g \right\}. \end{aligned}$$

Die Koordinaten der Flüssigkeitspartikelchen hängen also in linearer Weise von den $4n$ geometrischen Parametern des Kugelsystems ab.

Sind diese Parameter nach unserer Voraussetzung (43) durch Summen periodischer Funktionen dargestellt, so werden auch die Koordinaten α , β , γ durch Summen periodischer Funktionen ausgedrückt. Im Falle kleiner Schwingungen allgemeinsten Natur des Kugelsystems sind also die Bahnen der Flüssigkeitspartikelchen LISSAJOUS'sche Figuren allgemeinsten Natur. Wenn sämtliche periodische Funktionen untereinander kommensurable Perioden haben, werden diese LISSAJOUS'schen Figuren geschlossene Kurven, beispielsweise Ellipsen, wenn alle Parameter proportional Sinus- oder Kosinusfunktionen mit gleicher Periodenlänge sind. Im Falle synchroner Schwingungen reducieren sich die Bahnen auf gerade Linien, nämlich Linien-elemente der bei dieser Bewegungsform fest liegenden Stromlinien (47). Mit den langsam verlaufenden äußeren Konfigurationsänderungen des Systems werden sich die Parameter der LISSAJOUS'schen Kurven langsam verändern.

50. Verborgene Massen. — Bei der Definition 41 der verborgenen Bewegungen des Systems haben wir uns auf den Standpunkt gestellt, daß wir jede einzelne Kugel sehen können, während die Bewegungen nicht sichtbar sind, infolge der Schnelligkeit der Schwingungen und der Kleinheit der Amplituden. Mit Rücksicht auf die Aufgabe, welche wir uns gestellt haben, ist es aber wichtig, darauf aufmerksam zu machen, daß uns gewisse Bewegungen auch deshalb verborgen bleiben können, weil wir die einzelnen bewegten Massen nicht sehen.

Die Kugeln können nämlich zu Körpern beliebiger Form gruppiert sein, und so kann der Fall vorliegen, daß nur diese Körper, nicht aber die mit Molekülen zu vergleichenden Kugeln wahrnehmbar sind. Die individuellen Bewegungen der einzelnen nicht wahrnehmbaren Kugeln entziehen sich dann jeder Beobachtung. Einen durchschnittlichen Überschufs dieser Bewegungen in einer bestimmten Richtung werden wir dagegen als Bewegung des Körpers wahrnehmen.

Auf die analytische Behandlung dieses Falles in den Einzelheiten werden wir nicht eingehen, da dabei nichts besonders Neues hervortreten würde. Die Resultate, die wir für den Fall abgeleitet haben, daß zwar die einzelnen Kugeln, nicht aber ihre Schwingungen beobachtbar sind, weil die Schwingungen kleine Amplituden haben im Vergleiche zu den Kugelradien, lassen sich sofort auf den Fall anwenden, daß molekular konstituierte Körper vorliegen. Nur braucht man dann nicht mehr die Amplituden der verborgenen Schwingungen klein relativ zu den Dimensionen der schwingenden Kugel anzu-

nehmen, sondern es genügt, die Amplituden klein im Vergleiche zu den gegenseitigen Abständen der Kugeln vorauszusetzen. Da diese Abstände in unserem Probleme immer groß sind im Vergleiche zu den Radien der Kugeln, hindert nichts die Annahme, daß in diesem Falle verborgene Oscillationen vorliegen, deren Amplituden viel größer als die Kugelradien sind, da wir bei Kugelgruppen die Betrachtung nie bis zur Grenzfläche der einzelnen Kugeln ausdehnen können. Dagegen müssen natürlich die Pulsationen innerhalb engerer Grenzen begriffen sein.

Vierter Abschnitt.

Untersuchung eines beliebigen Stromes potentieller und solenoidaler Natur.

51. Entwicklung nach räumlichen Kugelfunktionen. — Kehren wir nach diesen Betrachtungen allgemeiner Natur wieder zu der Frage von der expliciten Darstellung der Flüssigkeitsbewegungen zurück, um eine größere Genauigkeit, als die Lösung **38(a)** giebt, zu erreichen. Diese Lösung war durch einfache Superposition der Lösungen für jede einzelne in ruhender Flüssigkeit bewegte Kugel gefunden. Die größere Genauigkeit erfordert die Beachtung des Umstandes, daß sich jede Kugel in dem Strome bewegt, welcher von dem Vorhandensein und der Bewegung der $n - 1$ anderen Kugeln herrührt. Um die Lösung vorzubereiten, werden wir erst einen beliebigen Strom LAPLACE'scher Natur betrachten.

Das Potential des betrachteten Stromes, sei φ . Entwickeln wir dieses φ in der Umgebung eines Punktes a, b, c nach Potenzen von $x - a, y - b, z - c$, so ergibt sich

$$(a) \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n + \dots$$

Das Glied n^{ter} Ordnung dieser Entwicklung, φ_n , ist ein homogenes Polynom n^{ten} Grades in $x - a, y - b, z - c$, welches die LAPLACE'sche Gleichung erfüllt, und welches deshalb nach der in **28** gegebenen Definition eine räumliche Kugelfunktion vom positiven Grade n darstellt.

Das allgemeinste Polynom n^{ten} Grades hat $\frac{1}{2}(n+2)(n+1)$ Koeffizienten. $\nabla^2 \varphi_n$ ist wieder ein homogenes Polynom, und zwar vom $(n-2)^{\text{ten}}$ Grad, also mit $\frac{1}{2}n(n-1)$ Koeffizienten. Soll also $\nabla^2 \varphi_n$ identisch verschwinden, so müssen alle diese Koeffizienten gleich Null sein, welche Bedingung $\frac{1}{2}n(n-1)$ Relationen zwischen den Koeffizienten von φ_n giebt. Die Kugelfunktion φ_n kann also höchstens $2n+1$ wesentliche Konstanten enthalten.

Es läßt sich zeigen, daß die Reihe (a) in Bezug auf Konvergenz sich den entsprechenden Entwicklungen der analytischen Funktionen in der Ebene analog verhält. Die Reihe wird in allen Punkten innerhalb derjenigen Kugelfläche um das Entwicklungscentrum a, b, c konvergieren, deren Radius gleich der Entfernung von dem Entwicklungscentrum zu dem am nächsten liegenden singulären Punkt der Funktion φ ist. Stellt nun φ ein reelles physikalisches Vektorfeld dar, so darf diese Funktion keinen singulären Punkt in denjenigen Gebieten des Raumes haben, welche diesem reellen Felde angehören. Die singulären Punkte von φ , welche in der That immer vorkommen, dürfen also nur den analytischen Fortsetzungen von φ außerhalb der Grenzflächen des durch φ dargestellten physikalischen Feldes angehören.

Stellt also φ beispielsweise das Geschwindigkeitsfeld in der Flüssigkeit dar, so wird die Konvergenz jedenfalls bestehen bis zur Berührung der Kugel um a, b, c mit den Grenzflächen der Flüssigkeit, das heißt, mit den Grenzflächen der in der Flüssigkeit schwimmenden fremden Körper.

Sonst brauchen wir auf die Konvergenzuntersuchungen nie genauer einzugehen, da wir nie die vollständigen Reihen verwenden werden, sondern nur die ersten Glieder derselben, indem wir immer solche Voraussetzungen machen, daß eine rasche Konvergenz dieser ersten Glieder vorliegt. Wir richten unsere Aufmerksamkeit nur auf die Diskussion dieser Glieder, welche eine für uns genügende angenäherte Darstellung des Potentialstromes geben.

52. Das Parallelfeld. — Das konstante Glied φ_0 der Entwicklung 51(a) stellt keine Bewegung dar.

Das erste zu berücksichtigende Glied wird deshalb das lineäre Glied oder die räumliche Kugelfunktion ersten Grades, welche wir in der Form

$$(a) \quad \varphi_1 = \alpha(x-a) + \beta(y-b) + \gamma(z-c)$$

schreiben können. Gehört dieses φ_1 der Entwicklung 51(a) an, so

sind die Koeffizienten α , β , γ die ersten Ableitungen des Potentials φ im Punkte a , b , c .

Das Potential φ_1 stellt dasselbe Feld dar, dem wir innerhalb der translatorisch bewegten Kugel begegnet sind. α , β , γ sind die Komponenten der überall im Felde gleichgerichteten und gleich großen Geschwindigkeit σ . Die Äquipotentialflächen $\varphi_1 = \text{const.}$ sind parallele Ebenen, die Richtungskosinus ihrer Normalen sind proportional zu α , β , γ . Die Stromlinien sind mit diesen Normalen identisch und bilden daher eine Schar von parallelen Geraden. Mit Rücksicht auf diesen Verlauf der Stromlinien können wir dieses Feld als das Parallelfeld bezeichnen.



Fig. 9. Parallelfeld.

Die solenoidale Darstellung des Feldes durch eine Zeichnung in der Ebene kann auf verschiedene Arten geschehen, deren besonders zwei einfach und wichtig sind.

Im einen Falle benutzen wir Vektorröhren mit kongruenten rektangulären Querschnitten. Die Darstellung geschieht dann durch parallele äquidistante Geraden, deren Zwischenräume die Projektionen dieser Röhren auf der Ebene der Figur angeben.

Im anderen, dem für uns wichtigeren Falle benutzten wir die Darstellung durch koaxiale Röhren, deren Schnittlinien mit einer Meridianebene gezeichnet werden (Fig. 9). Es ist die schon in der Figur 7 benutzte Darstellung des Feldes innerhalb der Kugel, wo

die Abstände der einzelnen Geraden von der Achse sich wie die Quadratwurzeln der ganzen Zahlen verhalten.

53. Das lineare Deformationsfeld. — Das nächstfolgende Glied der Entwicklung 51(a) ist die räumliche Kugelfunktion zweiten Grades, die wir in der Form

$$(a) \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} \dot{\alpha}_a (x - a)^2 + \frac{1}{2} \dot{\beta}_\beta (y - b)^2 + \frac{1}{2} \dot{\gamma}_\gamma (z - c)^2 \\ + \dot{\beta}_\gamma (y - b)(z - c) + \dot{\gamma}_\alpha (z - c)(x - a) + \dot{\alpha}_\beta (x - a)(y - b)$$

schreiben werden. Wenn φ_2 als der Entwicklung 51(a) angehörend betrachtet wird, sind die Koeffizienten $\dot{\alpha}_a$, $\dot{\beta}_\beta$, $\dot{\gamma}_\gamma$, $\dot{\beta}_\gamma$, $\dot{\gamma}_\alpha$, $\dot{\alpha}_\beta$ die sechs Ableitungen zweiter Ordnung der Funktion φ im Punkte a, b, c . Die Befriedigung der LAPLACE'schen Gleichung fordert, daß die Summe der Koeffizienten der quadratischen Glieder verschwindet:

$$(a') \quad \dot{\alpha}_a + \dot{\beta}_\beta + \dot{\gamma}_\gamma = 0.$$

Wir bemerken noch, daß wir gelegentlich aus Symmetrierücksichten die Koeffizienten der rektangulären Glieder $\dot{\gamma}_\beta$, $\dot{\alpha}_\gamma$, $\dot{\beta}_\alpha$ schreiben werden, so daß wir identisch

$$(a'') \quad \dot{\beta}_\gamma = \dot{\gamma}_\beta, \quad \dot{\gamma}_\alpha = \dot{\alpha}_\gamma, \quad \dot{\alpha}_\beta = \dot{\beta}_\alpha$$

haben.

Die ebenen Äquipotentialflächen des vorhergehenden Feldes sind jetzt durch die Flächen zweiten Grades

$$\varphi_2 = \text{const.}$$

ersetzt. Sämtliche Flächen haben das Feldcentrum a, b, c als Mittelpunkt und außerdem gemeinschaftliche Achsenrichtungen. Wegen der Relation (a') müssen weiter sämtliche Flächen hyperbolisch sein, und folglich den Kegel

$$\varphi_2 = 0$$

als gemeinschaftlichen Asymptotenkegel haben. Dieser Kegel trennt die Gegenden positiven Potentials von den Gegenden negativen Potentials und die zweimanteligen Hyperboloiden von den einmanteligen.

Der senkrecht zu diesen Hyperboloiden verlaufende Strom stellt gewissermaßen die einfachste typische Flüssigkeitsbewegung dar,

welche nur flüssige und nicht starre Körper annehmen können, weil das bewegte materielle Kontinuum dadurch seine Form verändert. Wir werden dieses Feld das Deformationsfeld nennen, oder spezieller das lineare Deformationsfeld, da die Geschwindigkeitskomponenten als lineare Funktionen der Koordinaten auftreten. Die Achsen des Hyperboloidsystems sollen Hauptdeformationsachsen und die je zwei solche Achsen enthaltenden Ebenen die Hauptdeformationsebenen heißen.

Wählen wir diese Achsen zu Koordinatenachsen, so werden die rektangulären Glieder in (a) verschwinden, und wenn wir gleichzeitig $a = b = c = 0$ setzen, so reduciert sich der Ausdruck des Potentials auf die Form

$$(b) \quad \varphi_2 = \frac{1}{2}(\delta_1^2 x^2 + \delta_2^2 y^2 + \delta_3^2 z^2),$$

wo fortwährend

$$(b') \quad \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 = 0.$$

54. Die Geschwindigkeitsverteilung im Deformationsfelde. — Die rechtwinkligen Geschwindigkeitskomponenten im Deformationsfelde sind lineare Funktionen der Koordinaten, nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} &= \alpha_a(x-a) + \alpha_\beta(y-b) + \alpha_\gamma(z-c) \\ (a) \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} &= \beta_a(x-a) + \beta_\beta(y-b) + \beta_\gamma(z-c) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} &= \gamma_a(x-a) + \gamma_\beta(y-b) + \gamma_\gamma(z-c), \end{aligned}$$

wo die Relationen 53(a'') zu beachten sind. Wenn die Hauptdeformationsachsen als Koordinatenachsen gewählt sind, ergibt sich einfacher

$$(b) \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \delta_1^2 x, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = \delta_2^2 y, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \delta_3^2 z.$$

Die rechtwinkligen Geschwindigkeitskomponenten nehmen also proportional dem Abstände von den Hauptdeformationsebenen zu. Die Geschwindigkeitsverteilung der x -Komponenten ist in der Figur 10 dargestellt. In Ebenen senkrecht zur x -Achse, welche sich im Abstände Eins voneinander befinden, unterscheiden sich die x -Komponenten der Geschwindigkeit um den Betrag δ_1^2 , und materielle Linien, parallel zur x -Richtung, haben eine Ausdehnungsgeschwindig-

keit mit den Betrag δ_1 pro Längeneinheit. Wegen der Relation 53 (b') muß unter den drei linearen Ausdehnungsgeschwindigkeiten eine das entgegengesetzte Vorzeichen wie die beiden anderen haben und gleichzeitig die numerisch größte sein, sofern nicht eine der anderen gleich Null ist. Es sei δ_1 diese durch das Vorzeichen von den beiden anderen verschiedene Ausdehnungsgeschwindigkeit; δ_2 und δ_3 können untereinander gleich oder ungleich sein, es sei im letzteren Falle δ_3 die kleinere. Wir können dann für die Zahlenwerte

$$\delta_1 \geq \delta_2 \geq \delta_3$$

annehmen.

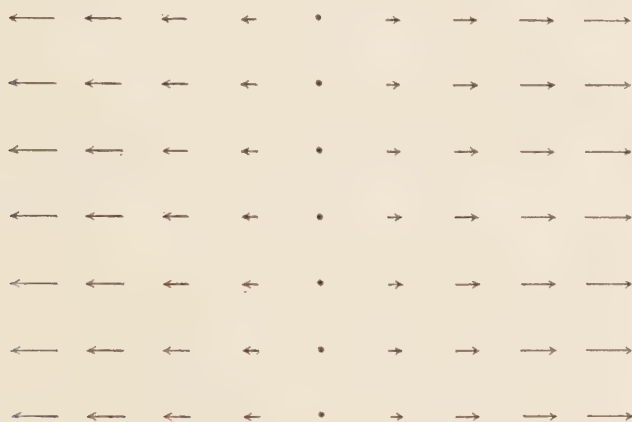


Fig. 10. Verteilung einer Geschwindigkeitskomponente im Deformationsfelde.

Die Gleichungen (a) beschreiben dieselbe Bewegung, aber in weniger übersichtlicher Weise. Dabei stellen $\dot{\alpha}_a$, $\dot{\beta}_\beta$, $\dot{\gamma}_\gamma$, genau wie δ_1 , δ_2 , δ_3 , lineare Ausdehnungsgeschwindigkeiten dar, während $\dot{\alpha}_\beta$, $\dot{\gamma}_a$, $\dot{\beta}_\gamma$ Verschiebungs- oder Gleitungsgeschwindigkeiten bedeuten. Wir werden alle diese Größen unter der Bezeichnung deformative Geschwindigkeiten zusammenfassen.

55. Die Stromlinien im Deformationsfelde. — Setzen wir die Geschwindigkeitskomponenten 54 (b) in die allgemeinen Differentialgleichungen 2 (a) der Vektorkurven ein, so giebt eine einfache Integration als Gleichungen der Vektorkurven

$$(a) \quad \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{1}{\delta_1}} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{1}{\delta_2}} = \left(\frac{z}{z_0}\right)^{\frac{1}{\delta_3}},$$

wobei man sich an der Relation 53 (b') zu erinnern hat.

Betrachten wir erst den Specialfall, daß eine der deformativen Geschwindigkeiten, δ_3 , gleich Null ist. Es wird dann $\delta_2 = -\delta_1 = \delta$. Das Potential der Bewegung wird

$$(b) \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} \delta (x^2 - y^2).$$

Die ganze Bewegung wird dann in Ebenen parallel zur xy -Ebene verlaufen, und die Gleichungen (a) reducieren sich auf

$$(b) \quad xy = \text{const.},$$

welches gleichschenklige Hyperbeln mit den Koordinatenachsen als Asymptoten darstellt.

Im allgemeinen Falle, wo keine der Größen δ_1 , δ_2 , δ_3 gleich Null ist, betrachten wir erst die Projektionen der Kurven auf die xy - und die xz -Ebene. Die Gleichungen derselben erhalten die Formen

$$(c) \quad x^{\frac{1}{\delta_1}} y^{-\frac{1}{\delta_2}} = \text{const.}, \quad x^{\frac{1}{\delta_1}} z^{-\frac{1}{\delta_3}} = \text{const.}$$

Da nach unserer Voraussetzung δ_1 das entgegengesetzte Vorzeichen von δ_2 und δ_3 hat, so haben alle hier auftretenden Exponenten gleiche Vorzeichen. $x = 0$ giebt also $y = z = \infty$, und $y = z = 0$ giebt $x = \infty$. Diese Projektionen der Kurven sind deshalb hyperbolischer Natur mit den Koordinatenachsen x und y , beziehungsweise x und z als Asymptoten.

Die Projektionen der Kurven auf die yz -Ebene werden

$$(c') \quad \frac{y}{y_0} = \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\frac{\delta_2}{\delta_3}}.$$

Der Exponent rechts ist immer eine positive GröÙe, da δ_2 und δ_3 gleiches Vorzeichen haben. Man schließt, daß $y = 0$, $z = 0$ giebt. Alle Kurven gehen also durch den Anfangspunkt der Koordinaten.

Ist $\delta_2 = \delta_3$ so reducieren sich diese Projektionen auf gerade Linien:

$$(c'') \quad \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}.$$

Wegen der Relation 53 (b') werden dann $\delta_2 = \delta_3 = -\frac{1}{2} \delta_1$. Das Potential wird

$$(d) \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} \delta \{x^2 - \frac{1}{2} (y^2 + z^2)\}.$$

Das Feld ist dann ein Umdrehungsfeld um die x -Achse. Die Stromlinien liegen in den Meridianebenen (c'), und die Gleichungen derselben in einer beliebigen Meridianebene werden

$$(d') \quad xy^2 = \text{const.},$$

welches unsymmetrische Hyperbeln darstellt, die sich rascher der y -Achse als der x -Achse nähern.

Ist dagegen δ_2 von δ_3 verschieden, so stellt (c') Kurven parabolischer Form dar. Nehmen wir besonders an, daß δ_2 numerisch größer als δ_3 ist, so wird die y -Achse die Achse der Parabeln, und im Specialfalle $\delta_2 = 2\delta_3$ liegen gewöhnliche Parabeln zweiten Grades vor. Für $\delta_3 = 0$ arten die Parabeln in gerade Linien parallel zur y -Achse aus, und wir kommen zu dem Falle der ebenen Bewegung zurück.

Der allgemeine Verlauf der Kurven läßt sich nach diesen Überlegungen in folgender Weise beschreiben: Die Kurven verlaufen asymptotisch zur Achse der größten linearen Dilatation oder Kontraktion δ_1 und zur Ebene der beiden kleineren Dilatationen δ_2 und δ_3 . Dabei bilden ihre Projektionen auf die letztere Ebene parabolische Kurven, mit der Achse der mittleren Dilatation oder Kontraktion δ_2 als Parabelachse.

56. Solenoidale Darstellung des Feldes. — In zwei Fällen läßt sich das Feld in einfacher Weise durch eine Zeichnung in der Ebene darstellen, nämlich wenn die Bewegung in parallelen Ebenen verläuft, und wenn das Feld um eine Achse symmetrisch ist.

Im ersten Falle hat das Potential die Form 55 (b) oder nach Einführen von Polarkoordinaten die Form

$$(a) \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} \delta r^2 (2 \cos^2 \theta - 1) = \frac{1}{2} \delta r^2 \cos 2\theta.$$

Die Gerade $\varphi_2 = 0$ wird durch die Gleichung $\cos 2\theta_0 = 0$ oder $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ dargestellt. Die Vektorkomponente längs der Richtung θ ist

$$\frac{\partial \varphi_2}{r \partial \theta} = -\delta r \sin 2\theta$$

und hat also in den Punkten der Geraden $\cos 2\theta_0 = 0$ den Zahlenwert δr . Der Fluß durch ein Linienelement dr dieser Geraden wird $\delta r dr$, und der totale Fluß durch die Länge r derselben wird den Wert

$$(b) \quad F = \frac{1}{2} \delta r^2$$

erhalten. Röhren oder Bänder gleichen Flusses werden also von Hyperbeln begrenzt, deren Scheitel die Abstände

$$p\sqrt{1}, \quad p\sqrt{2}, \quad p\sqrt{3}, \dots p\sqrt{n}, \dots$$

vom Mittelpunkte des Feldes haben, wo

$$p = \sqrt{\frac{2}{\delta}}$$

ist. Diese Hyperbeln sind in der Figur 11 gezeichnet.

Im Falle des Umdrehungsfeldes nimmt das Potential des De-

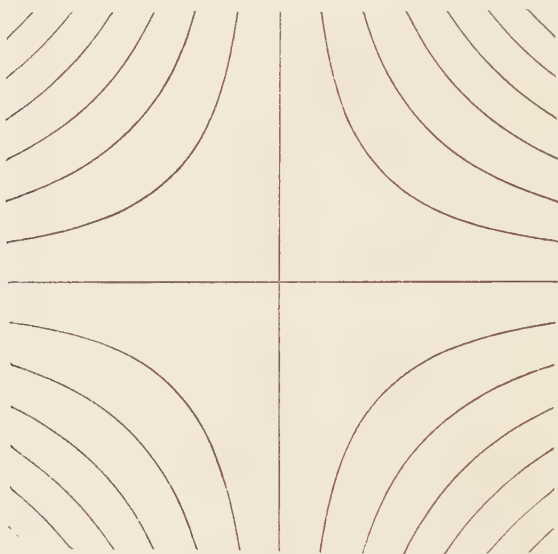


Fig. 11. Deformationsfeld, bei dem der Strom in parallelen Ebenen verläuft.

formationsfeldes die Form 55(d) an, oder nach Einführung von Polarkoordinaten

$$(c) \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} \delta r^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right).$$

Der Kegel $\varphi_2 = 0$ wird durch die Gleichung

$$(d) \quad \cos \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \theta_0 = \sqrt{2}$$

gegeben, ein Kegel, welchem wir schon früher begegnet sind, 31(c).

Die Vektorkomponente längs der Richtung der Meridiankreise erhält in diesem Falle den Wert

$$\frac{\partial \varphi_2}{r \partial \theta} = -\frac{3}{2} \delta r \sin \theta \cos \theta,$$

und hat also in den Punkten des Kegels (d) den Zahlenwert

$$\left(\frac{\partial \varphi_2}{r \partial \theta} \right)_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta r.$$

Hieraus findet man leicht den Fluß durch denjenigen Teil des Kegelmantels, welcher innerhalb des Abstandes r von dem Scheitel

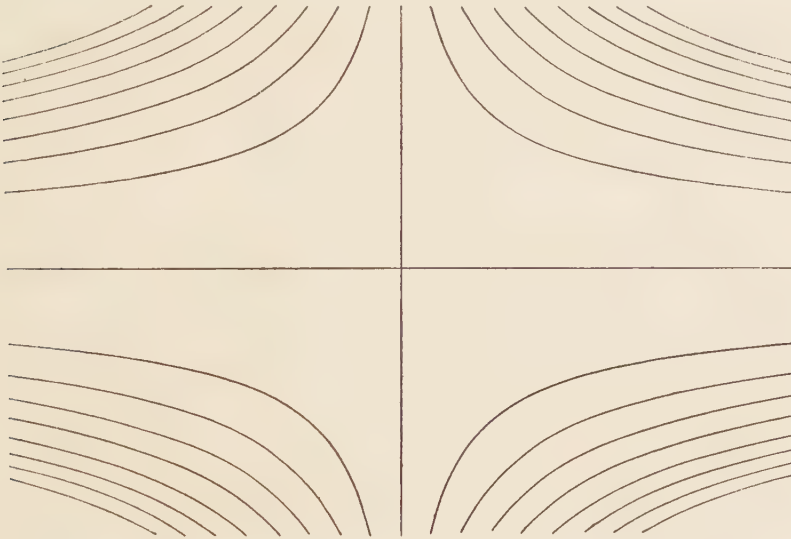


Fig. 12. Meridianschnitt durch ein Deformationsfeld, das gleichzeitig Umdrehungsfeld ist.

liegt. Dieser Teil des Kegelmantels wird durch einen Kreis mit dem Radius $r \sin \theta_0 = r \sqrt{\frac{2}{3}}$ begrenzt. Ein unendlich schmaler Ring des Mantels hat die Fläche $2\pi \sqrt{\frac{2}{3}} r dr$. Der elementäre Fluß wird

$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \delta r^2 dr,$$

also der ganze Fluß

$$(e) \quad F = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \delta r^3.$$

Die Radien, welche Stromröhren mit dem Fluß Eins geben, werden also die Werte

$$p\sqrt[3]{1}, \quad p\sqrt[3]{2}, \quad p\sqrt[3]{3}, \dots p\sqrt[3]{n}, \dots$$

haben, wo

$$p = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{2\pi\delta}}.$$

Nach diesen Zahlen bestimmt man die Schnittpunkte der in der Meridianebene zu zeichnenden Kurven mit der Geraden (d). Die Kurven selbst lassen sich nach der Gleichung 55 (d') durch eine einfache Linealkonstruktion finden. Sind x_0 und y_0 die Koordinaten desjenigen Punktes der Geraden (d), durch welchen die Kurven passieren sollen, so findet man das einem gegebenen y entsprechende x durch zwei nacheinander folgende Proportionalitätskonstruktionen im Anschluß an die Gleichung

$$x = x_0 \frac{y_0}{y} \cdot \frac{y_0}{y}.$$

Die Figur 12 stellt ein in dieser Weise gefundenes Kurvensystem in einer Meridianebene dar, welches bei Rotation um die horizontale Symmetrieachse Röhren gleichen Flusses erzeugt.

57. Reciproke Relationen zwischen den Geschwindigkeiten in zwei Punkten des Deformationsfeldes. — Wir wollen jetzt die Geschwindigkeiten in zwei Punkten x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 des Deformationsfeldes vergleichen. Die rechtwinkligen Komponenten derselben werden, wenn wir die Hauptdeformationsachsen als Koordinatenachsen benutzen

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 = \delta_1 x_0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_1 = \delta_1 x_1$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 = \delta_2 y_0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_1 = \delta_2 y_1$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0 = \delta_3 z_0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_1 = \delta_3 z_1.$$

Multiplizieren wir die ersten drei Gleichungen mit x_1, y_1, z_1 , die zweiten drei Gleichungen mit x_0, y_0, z_0 und addieren, so ergibt sich

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 x_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 y_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0 z_1 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_1 x_0 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_1 y_0 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_1 z_0.$$

Nennen wir die Resultantengeschwindigkeiten in den beiden Punkten g_0 und g_1 , die Vektorradien dieser Punkte r_0 und r_1 und die Winkel des einen Radius Vektor mit der anderen Geschwindigkeit g_0, r_1 und g_1, r_0 , so läßt sich diese Relation

$$(a) \quad g_0 r_1 \cos(g_0, r_1) = g_1 r_0 \cos(g_1, r_0)$$

schreiben.

Spezialisieren wir durch die Annahme $r_1 = r_0$, so daß wir Geschwindigkeiten in gleichem Abstand vom Feldcentrum vergleichen, so wird die Relation

$$(b) \quad g_0 \cos(g_0, r_1) = g_1 \cos(g_1, r_0).$$

Drehen wir jetzt den Radiusvektor r_1 , so ändert sich auf der linken Seite nur der eine Faktor $\cos(g_0, r_1)$, auf der rechten dagegen beide Faktoren g_1 und $\cos(g_1, r_0)$. Die linke Seite passiert durch ein Maximum, wenn der Winkel (g_0, r_1) gleich Null ist, und die Gleichung also die Form

$$(c) \quad g_0 = g_1 \cos(g_1, r_0)$$

hat. In diesem Falle muß auch die rechte Seite ein Maximum haben, und wir finden das Resultat:

Der geometrische Ort derjenigen Punkte, für welche die Geschwindigkeit g_1 die größte Projektion auf einen gegebenen Radiusvektor r_0 hat, ist derjenige Radiusvektor r_1 , welcher parallel zur Richtung der Geschwindigkeit g_0 ist.

58. Zusammengesetztes Parallel- und Deformationsfeld. — Wir betrachten jetzt das zusammengesetzte Feld, dessen Potential

$$(a) \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

durch Superposition der Potentiale des Parallelfeldes und des Deformationsfeldes entsteht.

Die Äquipotentialflächen $\varphi = \text{const.}$ sind in diesem Falle noch Flächen zweiten Grades, genau wie im einfachen Deformationsfeld. Nur werden sie nicht mehr ihren Mittelpunkt im Entwicklungscentrum a, b, c haben, da in der Gleichung der Flächen auch lineare Glieder vorkommen. Das zusammengesetzte Parallel- und Deformationsfeld (a) wird also mit einem Teile des einfachen Deformationsfeldes 53 (a) identisch sein, welcher mit passender Begrenzung

und in passendem Abstand von dem Deformationscentrum ausgeschnitten wird.

Betrachten wir besonders zwei typische, für uns im folgenden wichtige Specialfälle.

Am weitesten links in der Fig. 12 haben die Stromlinien den in Fig. 13 wiedergegebenen Verlauf. Man hat hier eine centrale gerade Stromlinie, welche von schwach gekrümmten, voneinander divergierenden Stromlinien umgeben ist. Die Stromintensität nimmt ab mit zunehmendem Abstand der Stromlinien voneinander, so daß der divergierende Strom auch als ein Strom bezeichnet werden kann, dessen Intensität in der Richtung des Stromes abnimmt. Durch Veränderung des Vorzeichens erhalten wir einen konvergierenden Strom, dessen Intensität in der Stromrichtung zunimmt.

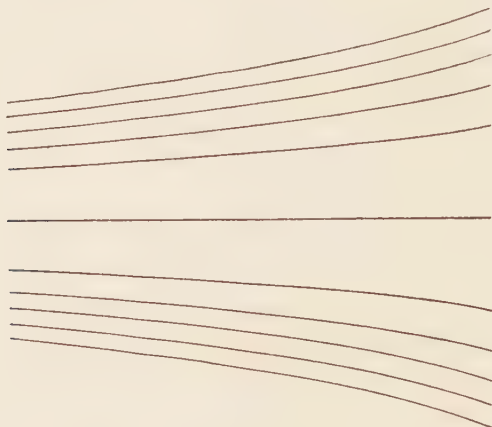


Fig. 13. Divergierender Strom.

Man überzeugt sich leicht, daß man dieses Bild eines divergierenden Stromes erhält, wenn man die Fig. 9 und 12 mit zusammenfallenden Rotationsachsen aufeinander legt, und die Superpositions-konstruktion ausführt. Noch allgemeiner erhält man einen Strom mit einer centralen geraden Stromlinie, welche von schwach gekrümmten divergierenden oder konvergierenden Stromlinien umgeben ist, indem man ein Parallelfeld und ein Deformationsfeld in solcher Weise superponiert, daß eine der Hauptdeformationsachsen mit einer Stromlinie des Parallelfeldes zusammenfällt.

Betrachten wir andererseits ein Gebiet aus der Fig. 11, welches symmetrisch zur Halbierungslinie eines der vier Quadranten der Figur liegt, so finden wir ein Strombild wie Fig. 14. Die Stromlinien sind alle nach derselben Seite und ungefähr gleich stark ge-

krümmt, so daß sie angenähert parallel verlaufen. Die Stromintensität verändert sich deshalb nicht mehr, wie im vorhergehenden Falle, längs der Stromrichtung, sondern in der Richtung senkrecht zu den Stromlinien, und zwar ist die Stromintensität, wie aus den Eigenschaften des einfachen Deformationsfeldes ersichtlich, am größten auf der konkaven Seite der Kurven.

Diesen gekrümmten Strom erhält man durch die Superpositionskonstruktion, wenn man auf die äquidistant gezeichneten Stromlinien des Parallelfeldes die Fig. 11 in solcher Weise legt, daß die Hauptdeformationsachsen einen Winkel von 45° mit den Geraden des Parallelfeldes bilden.

Nach dieser Betrachtung zweier einfacher Grenzfälle erkennt man leicht, daß, wenn man in beliebiger Weise ein Deformations-

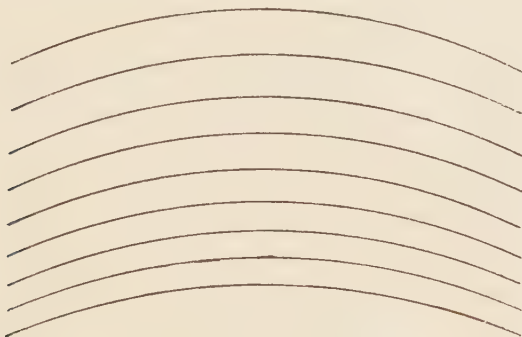


Fig. 14. Gekrümmter Strom.

feld einem Parallelfeld superponiert, im allgemeinen ein Feld entsteht, das gleichzeitig gekrümmte und divergierende Stromlinien hat, und dessen Intensität in einer zum Strom schiefen Richtung sich ändert.

59. Die Darstellung eines beliebigen Potentialstromes durch eine Entwicklung nach räumlichen Kugelfunktionen. — Man wird aus den eben angestellten Betrachtungen ersehen, wie man durch Superposition eines Parallel- und Deformationsfeldes ganz beliebige Gebiete eines beliebigen potentiellen Stromfeldes angenähert darstellen kann, vorausgesetzt, daß diese Gebiete hinlänglich klein sind.

Ein beliebiges Stück des Radialfeldes Fig. 1, welches eine volumändernde Kugel umgibt, wird man durch ein zusammengesetztes Parallel- und Deformationsfeld von dem in Fig. 13 gegebenen Typus

darstellen können. Ein Stück des die verlängerte Achse der fortschreitenden Kugel Fig. 7 umgebenden Feldes wird durch dasselbe Feld Fig. 13 angenähert dargestellt. In ähnlicher Weise wird das gekrümmte Feld der Fig. 14 zur Darstellung des Stromes in einem begrenzten Gebiet, dessen Mittelpunkt auf der verlängerten Äquatorialebene der fortschreitenden Kugel liegt, dienen. Durch andere Zusammensetzungen von Parallel- und Deformationsfeldern erreicht man die angenäherte Darstellung beliebiger anderer Teile der durch die Fig. 1, 2, 3, 7, 8 dargestellten Felder oder der mehr zusammengesetzten, die durch beliebig viele Kugeln erzeugt werden können. In der Umgebung der neutralen Punkte der Fig. 2 und 8 wird dabei nur das Deformationsfeld zur Verwendung kommen.

Zu dieser angenäherten Darstellung begrenzter Teile des gegebenen Stromes gelangt man also immer einfach in der Weise, daß man das gegebene Potential φ des Stromes nach TAYLOR's Theorem in der Umgebung eines gewählten Punktes a, b, c entwickelt, und die Glieder dritter und höherer Ordnung vernachlässigt.

Noch genaueren Anschluß an das gegebene Feld wird man erhalten können, wenn man in der Reihe 51 (a) das Glied φ_3 und die folgenden höheren Glieder mitnimmt. Die Felder, die durch diese räumlichen Kugelfunktionen dritten und höheren Grades dargestellt werden, oder die höheren Deformationsfelder, wie wir sie nennen werden, lassen sich genau wie das lineare Deformationsfeld diskutieren, und zeigen Eigenschaften, welche an diejenigen dieses Feldes erinnern. Wir werden aber diese Diskussionen nicht durchführen, da wir im folgenden diese Felder nie in expliciter Rechnung berücksichtigen brauchen.

Fünfter Abschnitt.

Allgemeinstes Aktionspotential einer Kugel.

60. Definitionseigenschaften der räumlichen Kugelfunktionen. — Wir sind oben zwei Klassen von räumlichen Kugelfunktionen begegnet, denjenigen positiven und denjenigen negativen Grades. Eine Kugelfunktion vom ganzen positiven Grade n war einfach ein homogenes Polynom n^{ten} Grades in $x-a, y-b, z-c$ und mit $2n+1$ wesentlichen Konstanten (51). Die Kugelfunktion vom negativen

Grade $-(n+1)$ konnte durch n -malige axiale Differentiation des reciproken Abstandes gebildet werden, und hatte sonst die Form eines homogenen Polynoms vom n^{ten} Grade mit $2n+1$ wesentlichen Konstanten, welches mit $r^{-(2n+1)}$ multipliziert war (28).

In beiden Fällen begegnen wir also einem Polynom vom positiven Grade n mit $2n+1$ Konstanten. Wir werden n die gemeinschaftliche Ordnungszahl dieser Funktionen nennen, welche die voneinander verschiedenen Grade n und $-(n+1)$ haben. Eine äußere Verwandtschaft der Kugelfunktionen gleicher Ordnung, aber verschiedenen Grades, tritt also sofort zu Tage. Ein allgemeiner Satz wird uns bald gestatten, eine konstitutive Verwandtschaft unter Kugelfunktionen gleicher Ordnung, aber verschiedenen Grades nachzuweisen, auf welcher die Anwendungen, die wir von diesen Funktionen machen werden, beruhen. Dieser Satz wird leicht aus den allgemeinen Definitionseigenschaften dieser Funktionen folgen.

Nach der schon angeführten Definition einer räumlichen Kugelfunktion als einer homogenen Lösung der LAPLACE'schen Gleichung muß jede solche Funktion gleichzeitig die EULER'sche Gleichung für homogene Funktionen und die LAPLACE'sche Gleichung erfüllen. Eine Kugelfunktion des Grades n läßt sich also definieren als eine Funktion, welche gleichzeitig die beiden Gleichungen

$$(a) \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial \varphi_n}{\partial y}(y-b) + \frac{\partial \varphi_n}{\partial z}(z-c) = n \varphi,$$

$$(b) \quad \nabla^2 \varphi_n = 0$$

erfüllt, und aus diesen Gleichungen muß man alle ihre Eigenschaften ableiten können.

61. Korrespondierende räumliche Kugelfunktionen. — Bemerken wir erst, daß die partiellen Ableitungen einer Potenz des Abstandsausdruckes r die Werte

$$(a) \quad \frac{\partial r^m}{\partial x} = m r^{m-2}(x-a), \quad \frac{\partial r^m}{\partial y} = m r^{m-2}(y-b), \quad \frac{\partial r^m}{\partial z} = m r^{m-2}(z-c)$$

haben, so finden wir durch neue Differentiation dieser Gleichungen nach x, y, z und Addition

$$(b) \quad \nabla^2 r^m = (m+1) m r^{m-2}.$$

Weiter sieht man unmittelbar, daß das ∇^2 eines Produktes von zwei Funktionen φ und ψ die Form

$$(c) \quad \begin{aligned} \nabla^2 \varphi \psi &= \psi \nabla^2 \varphi + \varphi \nabla^2 \psi \\ &+ 2 \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \end{aligned}$$

hat. Substituieren wir in dieser Gleichung

$$(d) \quad \psi = Cr^m, \quad \varphi = \varphi_n,$$

wo C eine beliebige Konstante ist und φ_n eine räumliche Kugelfunktion n^{ten} Grades ist, wobei n positiv oder negativ sein kann, so findet man sofort den Wert der ersten Zeile von (c), da $\nabla^2 \varphi_n = 0$, und da $\nabla^2 r^m$ durch (b) gegeben ist. In der zweiten Zeile von (c) substituiert man (a), und benützt die Eigenschaft 60 (a), welche φ_n als homogene Funktion des n^{ten} Grades besitzt. Es ergibt sich dann

$$\nabla^2 Cr^m \varphi_n = Cm(m+1+2n)r^{m-2} \varphi_n.$$

Der Ausdruck rechts verschwindet identisch in zwei Fällen: erstens, wenn $m = 0$, was zu dem Ausgangspunkte zurückführt, daß φ_n eine Lösung der LAPLACE'schen Gleichung ist; dann zweitens, wenn

$$m = -(2n+1).$$

Folglich besteht die Gleichung

$$(e) \quad \nabla^2 Cr^{-(2n+1)} \varphi_n = 0.$$

Das Produkt $Cr^{-(2n+1)} \varphi_n$ ist also eine Lösung der LAPLACE'schen Gleichung, und da es zugleich homogen vom Grade $-(n+1)$ ist stellt es eine räumliche Kugelfunktion vom Grade $-(n+1)$ dar:

$$(f) \quad \varphi_{-(n+1)} = Cr^{-(2n+1)} \varphi_n.$$

Wir finden also das folgende Resultat:

Aus einer räumlichen Kugelfunktion n^{ten} Grades kann man durch Multiplikation mit $r^{-(2n+1)}$ und einer beliebigen Konstanten eine neue Kugelfunktion vom Grade $-(n+1)$ bilden.

Wenden wir dieses Prinzip auf die allgemeinste Kugelfunktion vom positiven Grade n an, also auf das Polynom φ_n , so kommen wir zu der polaren Kugelfunktion $\varphi_{-(n+1)}$. Wenden wir nachher das Prinzip auf diese polare Kugelfunktion an, so kommen wir zu einer Funktion von dem positiven Grade n zurück, welche sich höchstens um einen konstanten Faktor von dem Polynom φ_n unterscheiden kann.

Die in dieser Weise ineinander überführbaren räumlichen Kugelfunktionen, die, wie man sieht, immer gleicher Ordnung sind, werden wir korrespondierende Kugelfunktionen nennen.

62. Solenoidal und potentiell korrespondierende Kugelfunktionen.

— Es stelle φ_n ein Vektorfeld auf der einen, und $\varphi_{-(n+1)}$ auf der anderen Seite einer Kugelfläche mit dem Radius d um den Punkt a, b, c dar.

Wählt man in der Formel 61 (f) $C = d^{2n+1}$, so erhält man die beiden genauer bestimmten korrespondierenden Kugelfunktionen

$$(a) \quad \varphi_n \quad \text{und} \quad \varphi_{-(n+1)} = \frac{d^{2n+1}}{r^{2n+1}} \varphi_n,$$

welche an der Kugelfläche $r = d$ identisch dieselben Werte haben. An der Grenzfläche wird dann die potentielle Grenzflächenbedingung (9) erfüllt, und wir können daher die beiden Funktionen (a) potentiell korrespondierend nennen.

Andererseits bemerken wir, daß die Vektorkomponente in der Richtung des Radiusvektor im Felde einer Kugelfunktion φ_n den Wert

$$(b) \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \frac{x-a}{r} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \frac{y-b}{r} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \frac{z-c}{r}$$

hat, welcher nach Umformung der rechten Seite, unter Benutzung der Homogenitätseigenschaft 60 (a), die Form

$$(c) \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} = \frac{n}{r} \varphi_n$$

annimmt.

Die Vektorkomponenten normal zur Kugelfläche $r = d$ in den Vektorfeldern der korrespondierenden Kugelfunktionen φ_n und $\varphi_{-(n+1)}$ werden also

$$(d) \quad \frac{n}{d} \varphi_n \quad \text{und} \quad -\frac{n+1}{d} \varphi_{-(n+1)}.$$

Ersetzen wir $\varphi_{-(n+1)}$ durch den Ausdruck 61 (f) und verlangen Identität der Normalkomponenten, so finden wir

$$(e) \quad C = -\frac{n}{n+1} d^{2n+1}.$$

Die korrespondierenden Kugelfunktionen

$$(f) \quad \varphi_n \quad \text{und} \quad \varphi_{-(n+1)} = -\frac{n}{n+1} \frac{d^{2n+1}}{r^{2n+1}} \varphi_n$$

stellen also Vektorfelder dar, welche an der Grenzfläche $r = d$ einander solenoidal fortsetzen, und wir können deshalb die Funktionen (f) solenoidal korrespondierend nennen.

63. Allgemeinstes Aktionspotential einer Kugel. — Das Potential φ der gegebenen Bewegung im Innern der Kugel, auf welchem die Bewegungserscheinung in der Flüssigkeit beruht, werden wir im folgenden das innere Aktionspotential der Kugel nennen. Das Potential φ der anschließenden Bewegung im äußeren Raume soll das äußere Aktionspotential der Kugel heißen.

Das innere Aktionspotential haben wir bisher im allgemeinsten Falle von der Form 35 (a) vorausgesetzt, so daß die Bewegung im Innern der Kugel aus einer homogenen Expansion und einer Translation zusammengesetzt war. Von den Potentialen dieser beiden Partialbewegungen war dasjenige der Expansion 18 (a) eine Kugelfunktion, während dasjenige der Translation 30 (a_1) eine räumliche Kugelfunktion ersten Grades war.

Ehe wir das Problem von der Bewegung einer Kugel mit dem inneren Aktionspotential 35 (a) in einem Strome behandeln, ist es zweckmäßig, erst den Fall zu betrachten, daß das innere Aktionspotential durch die allgemeine Entwicklung

$$(a) \quad \Phi_g = -\frac{1}{2} \frac{r^2}{d} \dot{d} + \Phi_1 + \Phi_2 + \dots \Phi_n + \dots$$

gegeben ist, wo also das erste Glied das Expansionsfeld, das zweite das Translationsfeld, und die folgenden die Kugelfunktionsfelder der nacheinander folgenden Ordnungen darstellen.

Nur die zwei ersten Glieder, die wir schon früher betrachtet haben, lassen sich durch die vier Koordinaten der Kugel a_g, b_g, c_g, d_g und die entsprechenden vier Geschwindigkeitskomponenten ausdrücken, und lassen deshalb während der Bewegung die Kugelform unverändert. Die allgemeine Bewegung (a) ist also eine solche, bei welcher die Kugelform nicht erhalten bleiben kann. Wir betrachten deshalb nur den Zeitpunkt, wo der Körper, welcher die Bewegung (a) hat, durch die Kugelform passiert, und fragen nach der anschließenden Bewegung in der umgebenden Flüssigkeit.

Das Prinzip von den solenoidal korrespondierenden Kugelfunktionen gestattet sofort das Potential dieser Bewegung aufzustellen, denn in der Reihe

$$(b) \quad \varphi_g = -\frac{d^2}{r} \dot{d} - \frac{1}{2} \frac{d^3}{r^3} \Phi_1 - \frac{2}{3} \frac{d^5}{r^5} \Phi_2 - \dots - \frac{n}{n+1} \frac{d^{2n+1}}{r^{2n+1}} \Phi_n - \dots$$

bildet jedes Glied die solenoidale Fortsetzung des entsprechenden Gliedes der Reihe (a).

Bewegt sich der Körper unter Erhaltung der Kugelform, so reduciert sich diese Reihe auf die früher betrachteten zwei ersten Glieder.

64. Deformationsbewegung der Kugel. — Die beiden ersten Glieder der obigen Reihen haben wir schon diskutiert. Das erste Glied beider Reihen entsprach dem Falle einer inneren Expansionsbewegung und eines äußeren Radialstromes (Fig. 1). Das zweite Glied entsprach dem Falle einer inneren Translationsbewegung und des entsprechenden Stromes, welche durch die Figur 7 dargestellt sind. Betrachten wir jetzt den Fall, daß sich die ganze Bewegung innerhalb der Kugel auf die durch das dritte Glied der Reihe 63 (a) dargestellte reduciert, so daß die Bewegung innerhalb und außerhalb der Kugel durch die Potentiale

$$(a) \quad \Phi = \Phi_2, \quad \varphi = -\frac{2}{3} \frac{d^5}{r^5} \Phi_2$$

dargestellt wird.

Φ_2 stellt ein Deformationsfeld innerhalb des Körpers dar, und φ die anschließende Bewegung im äußeren Raume im Augenblick, wo der Körper durch die Kugelform passiert. Beschränken wir uns auf den Fall, daß dieses Deformationsfeld ein Rotationsfeld ist, so können wir auch Φ_2 in der Form 56 (c)

$$(b) \quad \Phi_2 = \frac{1}{2} \delta r^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

schreiben, welches durch die Stromröhren der Figur 12 dargestellt ist. Das entsprechende äußere Feld wird durch das Potential

$$(c) \quad \varphi = -\frac{1}{3} \delta \frac{d^5}{r^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

gegeben. Bildet man die Vektorkomponenten längs Radiusvektor und Meridian, setzt sie in die auf Polarkoordinaten transformierte Differentialgleichung der Vektorkurven 29 (b) ein und integriert, so findet man als Gleichung der Vektorkurven

$$(d) \quad r^2 = K^2 \sin^2 \theta \cos \theta.$$

Diese Kurven lassen sich, wie die entsprechenden im inneren Raume, in sehr zweckmäßiger Weise mit Hilfe von Lineal und Zirkel konstruieren. Man führt dann die doppelten Winkel ein,

$$r^2 = K^2 \sin \theta \sin 2\theta,$$

und schreibt diese Gleichung in der Form

$$K:r = r:K \sin \theta \sin 2\theta.$$

Zur Konstruktion dienen zwei feste Kreise, einer mit dem Feldcentrum als Mittelpunkt und dem Radius K , und einer, der durch das Feldcentrum geht, seinen Mittelpunkt auf der Rotationsachse OX und K als Diameter hat. Der beliebig gewählte Winkel θ wird von beiden Schenkeln des rechten Winkels XOY aus abgetragen, so daß zwischen den Schenkeln dieser beiden Winkel der Winkel $AOA' = \frac{\pi}{2} - 2\theta$ entsteht. Die Projektion von OA auf OA' giebt dann $OB = K \sin 2\theta$, die Projektion dieser Linie auf OX

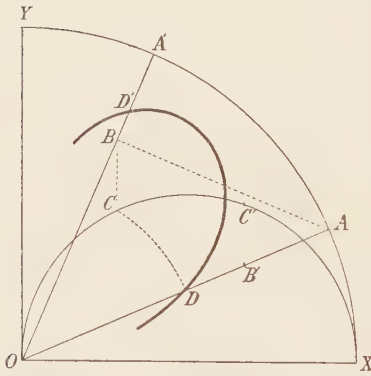


Fig. 15.

giebt $K \sin \theta \sin 2\theta$. Die zu dieser Projektion benutzte Perpendikuläre auf OX schneidet den kleineren Hilfszirkel in Punkt C , so daß $OC = r$ die gesuchte dritte Proportionale zu den Längen K und $K \sin \theta \sin 2\theta$ wird. Diese wird schließlich auf OA abgetragen. Die in der Figur punktierte gebrochene Linie $ABCD$ führt also zu dem gesuchten Kurvenpunkte D . Die Linien OA und OA' können noch zur Aufsuchung eines zweiten Punktes der Kurve dienen,

indem man in ganz entsprechender Weise die gebrochene Linie $A'B'C'D'$ zeichnet.

Wegen der Symmetrie braucht man nur die Kurve in einem Quadranten zu konstruieren, und wegen der Ähnlichkeit aller Kurven unter sich findet man eine beliebige neue Kurve durch proportionale Verlängerung aller Vektorradien.

Ist erst das Deformationsfeld im Innern der Kugel gezeichnet, so findet man durch Umkehrung der angegebenen Konstruktion das K einer Kurve im äußeren Raume, welche eine gegebene Kurve im inneren Raume fortsetzt. Man kann auch leicht diese K durch Berechnung des Vektorflusses durch den Kegel $\varphi = 0$ oder $\operatorname{tg} \theta = \sqrt{2}$ finden. Dabei ergibt sich besonders, daß die Kurven die Gerade

$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{2}$ in Abständen von dem Feldcentrum schneiden, die sich wie die Zahlen

$$\frac{1}{\sqrt{1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots$$

verhalten.

Man kommt in dieser Weise zu der Figur 16, welche die Deformationsbewegung der Kugel und die anschließende Bewegung der Flüssigkeit durch Vektorröhren darstellt. Die Röhren werden erzeugt, wenn die Figur um die horizontale Symmetrieachse rotiert. Setzt sich die Bewegung fort, so wird die Kugel ellipsoidische Form

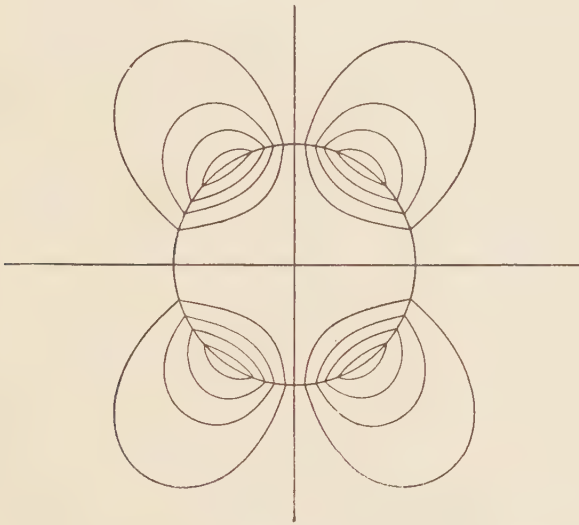


Fig. 16. Feld einer Kugel mit Deformationsbewegung.

annehmen, und die Darstellung ist nur streng gültig im Augenblicke, wo das Ellipsoid durch die Kugelform hindurchgeht. Besteht aber die Bewegung in kleinen Schwingungen des Ellipsoids um die Kugelform, so wird die Figur eine Darstellung der Bewegung geben, die um so genauer ist, je kleinere Amplituden die Schwingungen haben.

In ähnlicher Weise kann man die höheren Glieder im Ausdrucke des allgemeinsten Aktionspotentials einer Kugel diskutieren. Wir gehen aber darauf nicht ein, da dieselben in unsere expliciten Rechnungen nie eingehen werden.

Sechster Abschnitt.

Allgemeinstes Reaktionspotential einer Kugel. Eine Kugel in einem beliebigen Strome.

65. Allgemeinstes Reaktionspotential einer Kugel. — Das Potential eines gegebenen Stromes sei φ_γ ; wir entwickeln dasselbe nach räumlichen Kugelfunktionen positiven Grades in der Umgebung der Stelle g :

$$(a) \quad \varphi_\gamma = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n + \dots$$

Denken wir uns dann eine Kugel gegeben in ursprünglich ruhender Flüssigkeit, und mit einer inneren Bewegung, welche der Bewegung (a) entgegengesetzt gleich ist, so hat diese Kugel das innere Aktionspotential

$$(b) \quad -\varphi_\gamma$$

und wird in der umgebenden Flüssigkeit eine Bewegung erzeugen, welche nach 63 (b) das Potential

$$(c) \quad \varphi_{\gamma g} = \frac{1}{2} \frac{d_g^3}{r_g^3} \varphi_1 + \frac{2}{3} \frac{d_g^5}{r_g^5} \varphi_2 + \dots + \frac{n}{n+1} \frac{d_g^{2n+1}}{r_g^{2n+1}} \varphi_n + \dots$$

hat.¹

Nachdem wir diese Partialbewegungen definiert haben, betrachten wir eine zusammengesetzte Bewegung, welche dadurch entsteht, daß wir derjenigen Bewegung, welche durch $-\varphi_\gamma$ innerhalb, und durch $\varphi_{\gamma g}$ außerhalb der Kugel gegeben ist, die durch das Potential φ_γ gegebene Bewegung (a) superponieren. Innerhalb und außerhalb der Kugel erhalten wir dann Bewegungen, welche beziehungsweise durch die Potentiale

$$(d) \quad \Psi = 0$$

$$\varphi = \varphi_\gamma + \varphi_{\gamma g}$$

dargestellt werden. Das heißt, innerhalb der Kugel herrscht Ruhe,

¹ Vergl. C. A. BJERKNES, Sur le mouvement simultané etc., Formel (19). Man erinnere sich dabei an die Relation $\varphi_n = r^n X_n$, welche zwischen der räumlichen Kugelfunktion φ_n und der entsprechenden Kugelflächenfunktion X_n besteht.

und auferhalb eine Bewegung mit dem Potential φ , welches explicite geschrieben die Form

$$(e) \quad \begin{aligned} \varphi = \varphi_0 + \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d^3}{r^3}\right) \varphi_1 + \left(1 + \frac{2}{3} \frac{d^5}{r^5}\right) \varphi_2 + \dots \\ + \left(1 + \frac{n}{n+1} \frac{d^{2n+1}}{r^{2n+1}}\right) \varphi_n + \dots \end{aligned}$$

annimmt.

Die in dieser Weise gefundene Lösung können wir folgendermaßen deuten: φ_γ stellt einen ursprünglich gegebenen Strom dar, den Einfallsstrom. In denselben wird eine ruhende Kugel eingebracht, welche ein Hindernis bildet. φ ist das Potential der dadurch entstehenden zusammengesetzten Bewegung der Flüssigkeit, und $\varphi_{\gamma g}$ ist das Potential derjenigen Partialbewegung der Flüssigkeit, welche auf dem Vorhandensein der Kugel beruht. Dieses Potential werden wir das Reflex- oder Reaktionspotential nennen; der entsprechende Strom ist der von der Kugel herrührende Reflex- oder Reaktionsstrom. Einfallsstrom und Reflexstrom bilden zusammen einen tangentiell zur Oberfläche der Kugel verlaufenden Strom. Setzt man den Radius der Kugel gleich Null, so verschwindet der Reflexstrom, und die ganze Bewegung reduciert sich auf den ursprünglichen Einfallsstrom. Die gegebene Entwicklung enthält die folgende einfache Regel für die Bildung des Reflex- oder Reaktionspotentials:

Das Potential des Reflexstromes einer Kugel gegen einen beliebigen Einfallsstrom ist mit dem äußeren Aktionspotential der Kugel identisch, wenn man derselben einen inneren Aktionsstrom giebt, welcher dem Einfallsstrom entgegengesetzt gleich ist.

66. Zusammensetzung von Aktions- und Reaktionspotential. — Superponieren wir jetzt die Lösungen 63 (a) und (b) für die bewegte Kugel in ursprünglich ruhender Flüssigkeit und 65 (d) für die ruhende Kugel im Strom, so ergibt sich eine Bewegung, welche innerhalb, beziehungsweise auferhalb der Kugel durch die Potentiale

$$(a) \quad \Phi = \Phi_g$$

$$(b) \quad \varphi = \varphi_g + (\varphi_\gamma + \varphi_{\gamma g})$$

dargestellt wird. Oder explicite

$$(c) \quad \Phi = \frac{1}{2} \frac{r^2}{d} \dot{d} + \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n + \dots$$

$$(d) \quad \varphi = -\frac{d^3}{r} \dot{d} - \frac{1}{2} \frac{d^3}{r^3} \Phi_1 - \frac{2}{3} \frac{d^5}{r^5} \Phi_2 - \dots - \frac{n}{n+1} \frac{d^{2n+1}}{r^{2n+1}} \Phi_n - \dots$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d^3}{r^3}\right) \varphi_1 + \left(1 + \frac{2}{3} \frac{d^5}{r^5}\right) \varphi_2 + \dots + \left(1 + \frac{n}{n+1} \frac{d^{2n+1}}{r^{2n+1}}\right) \varphi_n + \dots$$

Diese Lösung läßt sich in der Weise deuten, daß eine Kugel, deren innerer Bewegungszustand durch das Potential Φ gegeben ist, durch eine Flüssigkeit fortschreitet, welche eine von dem Vorhandensein und der Bewegung der Kugel unabhängige, durch das Potential φ dargestellte Bewegung besitzt.

Das Potential φ der unter diesen Verhältnissen gebildeten Bewegung der Flüssigkeit ist in Formel (d) in solcher Weise geschrieben, daß die erste Zeile rechts das Potential derjenigen Bewegung darstellt, welche die Kugel in ruhender Flüssigkeit erzeugen würde, während die zweite den durch das Vorhandensein der ruhenden Kugel modifizierten äußeren Strom darstellt.

Die Entwicklung läßt sich auch

$$(e) \quad \varphi = -\frac{d^2}{r} \ddot{d}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{d^3}{r^3} (\Phi_1 - \varphi_1) - \frac{2}{3} \frac{d^5}{r^5} (\Phi_2 - \varphi_2) - \dots - \frac{n}{n+1} \frac{d^{2n+1}}{r^{2n+1}} (\Phi_n - \varphi_n) - \dots$$

$$+ \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n + \dots$$

schreiben. Die dritte Zeile stellt hier den Einfallstrom dar. Die vorhergehenden Glieder stellen das äußere Aktionspotential einer Kugel 63(b) dar, nur daß nicht mehr die partiellen Potentiale Φ_1, Φ_2, \dots der absoluten inneren Bewegung der Kugel in der Formel auftreten, sondern die Differenzen $\Phi_1 - \varphi_1, \Phi_2 - \varphi_2, \dots$ welche den Überschuss der Bewegung der Kugel über diejenige des Einfallstromes darstellen. Besteht kein solcher Unterschied, d. h. ist $\dot{d} = 0$, $\Phi_1 - \varphi_1 = 0, \dots$, so kommt es zu keinem Konflikt zwischen Kugel und Einfallstrom, und der letztere erleidet durch das Vorhandensein der Kugel keine Modifikation.

Wenn sich die Kugel unter Erhaltung der Kugelform bewegt, wird sich die Entwicklung (a) des inneren Potentials Φ auf die beiden ersten Glieder beschränken, und in der Entwicklung (d) wird

die erste Zeile sich ebenfalls auf die zwei ersten Glieder reducieren, während die Glieder der zweiten Zeile sich unbegrenzt fortsetzen.

In der Form (d) oder (e) kann man immer das Potential der Flüssigkeitsbewegung in der Umgebung einer beliebigen Kugel g des Kugelsystems darstellen, wenn Φ_g das innere Aktionspotential der Kugel ist, und φ_γ das Potential desjenigen Einfallsstromes, welcher auf dem Vorhandensein und der Bewegung der $n - 1$ anderen Kugeln beruht.

67. Die Kugel unveränderlichen Volumens im Parallelfeld. — Bewegt sich die Kugel nur translatorisch und ohne Expansion, also mit dem inneren Aktionspotential

$$(a) \quad \Phi_1 = a(x - a) + b(y - b) + c(z - c)$$

in einem Einfallsstrom, welcher einfach ein Parallelstrom mit dem Potential

$$(b) \quad \varphi_1 = \alpha(x - a) + \beta(y - b) + \gamma(z - c)$$

ist, so wird nach 66(d) das Potential der in der Flüssigkeit erzeugten Geschwindigkeit

$$(c) \quad \varphi = -\frac{1}{2} \frac{d^3}{r^3} \Phi_1 + \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d^3}{r^3}\right) \varphi_1.$$

Das erste Glied ist das äußere Aktionspotential, welches auf der Translationsbewegung der Kugel beruht, während das letzte Glied das Potential der im Parallelstrom ruhenden Kugel darstellt.

Das Potential läßt sich auch nach Analogie von 66(e) in der Form

$$(d) \quad \varphi = \varphi_1 - \frac{1}{2} \frac{d^3}{r^3} (\Phi_1 - \varphi_1)$$

schreiben, oder explicite

$$(e) \quad \begin{aligned} \varphi = & \alpha(x - a) + \beta(y - b) + \gamma(z - c) \\ & - \frac{1}{2} \frac{d^3}{r^3} \left\{ (\dot{a} - \alpha)(x - a) + (\dot{b} - \beta)(y - b) + (\dot{c} - \gamma)(z - c) \right\}. \end{aligned}$$

Das erste Glied stellt hier das äußere Parallelfeld dar, während das zweite Glied das Potential der Kugel in ihrer Bewegung relativ zu dem Parallelstrom ausdrückt. Die Formel zeigt, wie zu erwarten war, daß die Kugel auf die Bewegung der Flüssigkeit dann, und nur dann, einen Einfluß haben wird, wenn sie eine Geschwindigkeit $\dot{a} - \alpha$, $\dot{b} - \beta$, $\dot{c} - \gamma$ relativ zu dem gegebenen Parallelstrom hat.

Das Potential derjenigen Partialbewegung, welche auf dem Vorhandensein und der Bewegung der Kugel beruht, hat den Ausdruck:

$$(f) \quad -\frac{1}{2} \frac{d^3}{r^3} \left\{ (a - \alpha)(x - a) + (b - \beta)(y - b) + (c - \gamma)(z - c) \right\}$$

und ist also das Potential einer Kugel, welche sich mit einer absoluten Geschwindigkeit $a - \alpha$, $b - \beta$, $c - \gamma$ in einer ursprünglich ruhenden Flüssigkeit bewegt.

68. Allgemeinste Definition der Aktionsgeschwindigkeit und des Aktionsmomentes. — Die relative Geschwindigkeit

$$(a) \quad \quad \quad a - \alpha, \quad b - \beta, \quad c - \gamma,$$

auf welcher das Eingreifen der Kugel in die Bewegung der Flüssigkeit beruht, werden wir die Konfliktgeschwindigkeit nennen. Die Definition dieser GröÙe ist also:

(A) *Die Konfliktgeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Kugel relativ zu dem Einfallsstrom.*

Einer in ruhender Flüssigkeit mit der absoluten Geschwindigkeit (a) bewegten Kugel würden wir nach unseren vorhergehenden Definitionen (33) die Aktionsgeschwindigkeit

$$(b) \quad f = \frac{3}{2}(a - \alpha), \quad g = \frac{3}{2}(b - \beta), \quad h = \frac{3}{2}(c - \gamma)$$

zuschreiben, und die Tangentialkomponente dieser Geschwindigkeit würde die Gleitungsgeschwindigkeit an der Oberfläche der Kugel sein.

Teilen wir aber jetzt allen Punkten innerhalb und auÙerhalb der Kugel die gemeinschaftliche Geschwindigkeit α , β , γ mit, so erhalten wir innerhalb der Kugel die Geschwindigkeit a , b , c , und auÙerhalb die durch das Potential 67 (e) dargestellte Bewegung. Durch die Mitteilung dieser gemeinschaftlichen Geschwindigkeit ändert sich die relative von Kugel und Flüssigkeit nicht, und die Gleitungsgeschwindigkeit bleibt also fortwährend die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit (b).

Die Geschwindigkeit (b) hat also in dem hier vorliegenden Problem genau dieselbe Bedeutung, als die specieller definierte 33 (a) im Problem von der in ruhender Flüssigkeit bewegten Kugel. Wir können deshalb eine neue, verallgemeinerte Definition aufstellen, welche die ältere (33) als Specialfall umfaßt. Dabei legen wir die durch (A) definierte Konfliktgeschwindigkeit zu Grunde.

(B) Die Aktionsgeschwindigkeit einer in einem Strome bewegten Kugel ist die mit dem Faktor $\frac{3}{2}$ multiplizierte Konfliktgeschwindigkeit.

Kommt kein äußerer Strom vor, so reduziert sich die Konfliktgeschwindigkeit auf die aktuelle Geschwindigkeit der Kugel, und wir kommen auf die frühere Definition zurück. Ist dagegen die Kugel in Ruhe, so reduziert sich die Konfliktgeschwindigkeit auf das 1 fache, und die Aktionsgeschwindigkeit der ruhenden Kugel auf das $\frac{3}{2}$ fache der negativ genommenen Geschwindigkeit des Parallelstromes.

Unter den früher aufgestellten Definitionen des Aktionsmomentes ist die in 33 gegebene so gewählt, daß sie auch nach den jetzt vorgenommenen Verallgemeinerungen brauchbar bleibt. Als immer gültige Definition behalten wir also die folgende:

(C) Das kinematische Aktionsmoment der Kugel ist das Produkt der Aktionsgeschwindigkeit in das Volumen der Kugel.

Als Definitionsgleichungen können also immer

$$(c) \quad \dot{F} = f E, \quad \dot{G} = g E, \quad \dot{H} = h E,$$

oder

$$(c') \quad \dot{F} = \frac{3}{2}(\dot{a} - \dot{\alpha}) E, \quad \dot{G} = \frac{3}{2}(\dot{b} - \dot{\beta}) E, \quad \dot{H} = \frac{3}{2}(\dot{c} - \dot{\gamma}) E$$

dienen, und diese Größen werden immer den Übergang zur Vorstellung von dem volumändernden Kugelpaare vermitteln. Dieselben gestalten das Potential 67(e) der im Parallelfelde bewegten Kugel in der Form

$$(d) \quad \varphi = \dot{\alpha}(x-a) + \dot{\beta}(y-b) + \dot{\gamma}(z-c) - \frac{\dot{F}(x-a) + \dot{G}(y-b) + \dot{H}(z-c)}{4\pi r^3}$$

zu schreiben.

69. Der Fall, daß die Translationsrichtungen der Kugel und des Feldes zusammenfallen. — Das Feld wird nur dann ein Umdrehungsfeld, wenn die Geschwindigkeiten \dot{a} , \dot{b} , \dot{c} der Kugel und $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ der Flüssigkeit gleichgerichtet sind. Führen wir unter diesen Voraussetzungen in 67(e) Polarkoordinaten ein, so wird das Potential

$$(a) \quad \varphi = \left\{ \dot{\sigma} r - \frac{1}{2} \frac{d^3}{r^2} (\dot{s} - \dot{\sigma}) \right\} \cos \theta.$$

Zur Darstellung dieses für uns besonders wichtigen Feldes durch Vektorröhren gelangt man durch die Superpositionskonstruktion, wenn man die Figuren 7 und 9 aufeinander legt.

Wir bemerken zunächst, daß die Äquipotentialfläche $\varphi = 0$ dieses Feldes aus zwei Teilen besteht, nämlich aus der Ebene $\cos \theta = 0$, das heißt der Äquatorebene der Kugel, und aus einer Kugel

$$(b) \quad r = d \sqrt[3]{\frac{s - \dot{\sigma}}{2 \dot{\sigma}}}.$$

Diese Kugel besteht überhaupt nur, wenn die Wurzel positiv ist, das heißt, so lange die Konfliktgeschwindigkeit $s - \dot{\sigma}$ dasselbe Vorzeichen hat als die Geschwindigkeit $\dot{\sigma}$ des Parallelstromes. Die erste Bedingung für die Existenz dieser kugelförmigen Äquipotentialfläche wird also, daß sich die Kugel mit dem Strome und schneller als derselbe bewegt. Außerdem wird sie, solange die Wurzel kleiner als Eins ist, nur der virtuellen Fortsetzung des äußeren Feldes im Inneren der Kugel angehören. Ist die Wurzel gleich Eins, das heißt ist

$$(c) \quad s = 3 \dot{\sigma},$$

so daß die Kugel dreimal so schnell als der Strom läuft, so wird der Radius der kugelförmigen Äquipotentialfläche mit der Kugeloberfläche zusammenfallen. Bewegt sich die Kugel noch schneller, so daß s größer als $3 \dot{\sigma}$ ist, so wird die kugelförmige Äquipotentialfläche ins reelle Flüssigkeitsfeld hinaustreten.

Wird aber die Konfliktgeschwindigkeit $s - \dot{\sigma}$ negativ, so daß sich die Kugel relativ zu dem Strome rückwärts bewegt, so besteht keine solche kugelförmige Äquipotentialfläche, weder im reellen Flüssigkeitsfelde, noch in der virtuellen Fortsetzung desselben innerhalb der Kugel. In diesem Falle wird aber eine kugelförmige Stromröhre im Felde vorhanden sein. Die Radialgeschwindigkeit ist nämlich

$$(f) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \left(\dot{\sigma} + \frac{d^3}{r^3} (s - \dot{\sigma}) \right) \cos \theta.$$

Dieselbe wird Null in der Äquatorebene $\theta = \frac{\pi}{2}$, und außerdem auf der Kugelfläche

$$(g) \quad r = d \sqrt[3]{\frac{\dot{\sigma} - s}{\dot{\sigma}}}.$$

In allen Punkten dieser Kugelfläche reduciert sich die Geschwindigkeit auf die Meridiankomponente, welche tangentiell zur Kugelfläche liegt, so daß dieselbe den Mantel einer Stromröhre bildet. Der Radius dieser Kugel ist Null, wenn $s = \dot{\sigma}$, so daß die Kugel also

genau dem Strome folgt, und liegt zwischen 0 und d solange s zwischen den Werten $\hat{\sigma}$ und 0 liegt, so daß sich die Kugel mit dem Strome, aber langsamer als derselbe, bewegt. Ist $s = 0$, ist die Kugel also in Ruhe, so wird $r = d$, und die kugelförmige Stromröhre fällt mit der Oberfläche der Kugel zusammen. Passiert schliesslich s durch Null, um das entgegengesetzte Vorzeichen von demjenigen von $\hat{\sigma}$ anzunehmen, so daß sich die Kugel auch im absoluten Sinne gegen den Strom bewegt, so tritt die kugelförmige Stromröhre in das reelle, äufere Flüssigkeitsfeld hinaus.

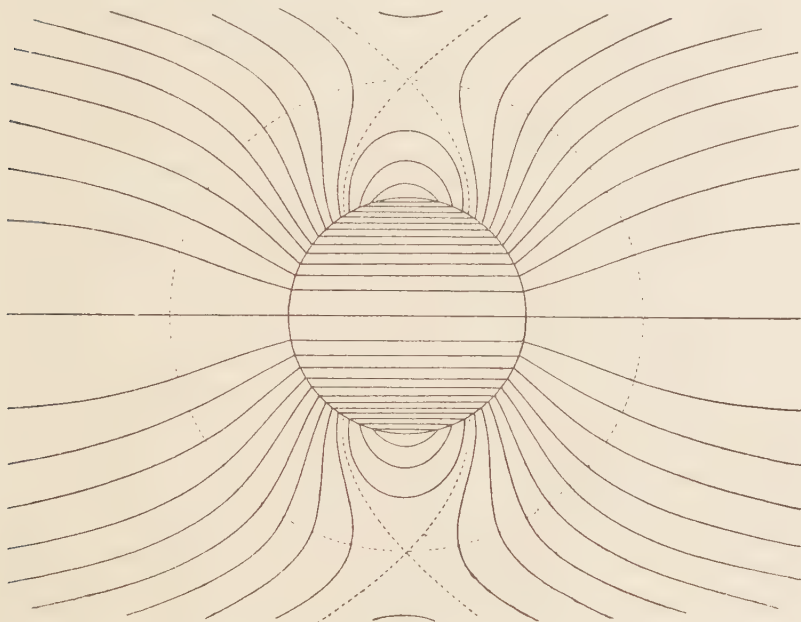


Fig. 17. Kugel im Parallelstrom, wenn $s > 3 \hat{\sigma}$.

70. Solenoidale Darstellung des Feldes. — Wir haben also sieben wesentlich verschiedene Fälle zu betrachten.

1. Die Kugel bewegt sich mit dem Strome und mehr als dreimal so schnell als derselbe. Dieser Fall ist durch die Figur 17 dargestellt, wo $s = 17 \hat{\sigma}$ gesetzt ist. Die kugelförmige Äquipotentialfläche hat den Radius $r = 2d$ und ist in der Figur punktiert. Innerhalb dieser Kugelfläche ist das Feld der fortschreitenden Kugel das überwiegende, außerhalb nähert sich das Stromfeld mehr und mehr einem ungestörten Parallelfelde. Diese Kugel wird von allen Stromlinien normal durchgeschnitten, mit Ausnahme einer singulären

Stromlinie, welche sich selbst durchschneidet in einem Punkte, wo die Geschwindigkeit Null ist. Die beiden Zweige dieser Stromlinie bilden miteinander einen rechten Winkel, und mit der kugelförmigen Äquipotentialfläche einen Winkel von $\frac{\pi}{4}$. Dreht sich die Figur um die Symmetrieachse, so werden die Kurven Stromröhren erzeugen, und der neutrale Punkt wird in der verlängerten Äquatorialebene der Kugel einen Kreis beschreiben, auf dem die Geschwindigkeit der Flüssigkeit gleich Null ist.

2. Die Kugel bewegt sich mit dem Strome und dreimal so schnell als der Strom, $s = 3\sigma$.

Fig. 18 zeigt diesen Fall, wo die kugelförmige Äquipotentialfläche

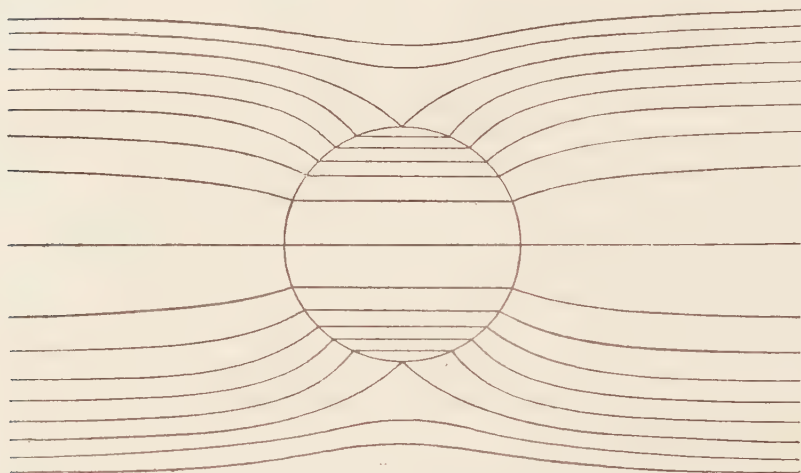


Fig. 18. Kugel im Parallelstrom, wenn $s = 3\sigma$.

mit der Kugelfläche zusammengefallen ist. In diesem Falle enden also die Stromlinien alle senkrecht gegen die Oberfläche der Kugel, mit Ausnahme der singulären Stromlinie, welche die Kugel an dem Äquator unter den Winkeln $\frac{\pi}{4}$ trifft. Die an dem Äquator der Kugel liegenden Flüssigkeitspartikelchen haben also in diesem Falle die Geschwindigkeit Null. Bei der Rotation der Figur um die Symmetrieachse wird diese singuläre Stromlinie den Mantel einer Stromröhre beschreiben, welche die Äquatorebene der Kugel als kleinste Querschnittfläche hat. Da die Geschwindigkeit innerhalb der Kugel dreimal so groß ist als die ungestörte Geschwindigkeit des Parallelfeldes in großen Abständen von der Kugel, so wird der Querschnitt

dieser Röhre in großen Abständen von der Kugel dreimal so groß sein, als die Fläche des Äquators der Kugel.

3. Die Kugel bewegt sich mit dem Strome mit einer Geschwindigkeit, welche größer ist als diejenige des Stromes, aber kleiner als dreimal so groß. Das Feld wird dann im allgemeinen Aussehen demjenigen der Figur 18 ähnlich sein, nur daß die Stromlinien weniger stark gegen die Oberfläche der Kugel eingebogen sind. Die kugelförmige Äquipotentialfläche ist aus dem reellen Flüssigkeitsfelde verschwunden, und gehört der virtuellen Fortsetzung des äußeren Feldes im Innern der Kugel an.

4. Die Kugel bewegt sich mit dem Strome mit derselben Geschwindigkeit als der Strom, $s = \sigma$.

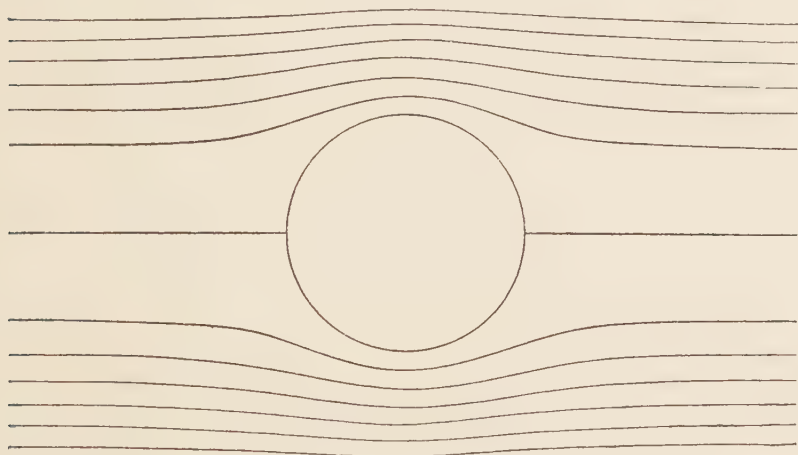


Fig. 19. Kugel im Parallelstrom, wenn $s = 0$.

Die kugelförmige Äquipotentialfläche ist dann auch aus dem virtuellen Felde verschwunden, und die kugelförmige Stromröhre hat sich noch nicht gebildet. Das Parallelfeld setzt sich ungestört durch die Kugel fort, als wäre keine Kugel vorhanden; wir haben das ungestörte Parallelfeld der Figur 9.

5. Die Kugel bewegt sich mit dem Strome, aber langsamer als der Strom. Die kugelförmige Stromröhre hat sich im virtuellen Felde innerhalb der Kugel ausgebildet, was sich dadurch zeigt, daß die Stromlinien des Parallelfeldes in der Nähe der Kugel divergieren.

6. Die Kugel ist in Ruhe: $s = 0$. Die kugelförmige Stromröhre fällt dann mit der Kugelfläche zusammen, und man erhält

die Stromlinien der Figur 19, welche das Abweichen und Umbiegen des Stromes um das Hindernis zeigen.

7. Die Kugel bewegt sich gegen den Strom. Die kugelförmige Stromröhre ist dann in das reelle Flüssigkeitsfeld hinausgetreten, und ist die Grenzfläche zwischen einem inneren Felde, welches überwiegend dasjenige einer fortschreitenden Kugel ist, und einem äußeren Felde, welches überwiegend ein Parallelfeld ist. In Figur 20 ist

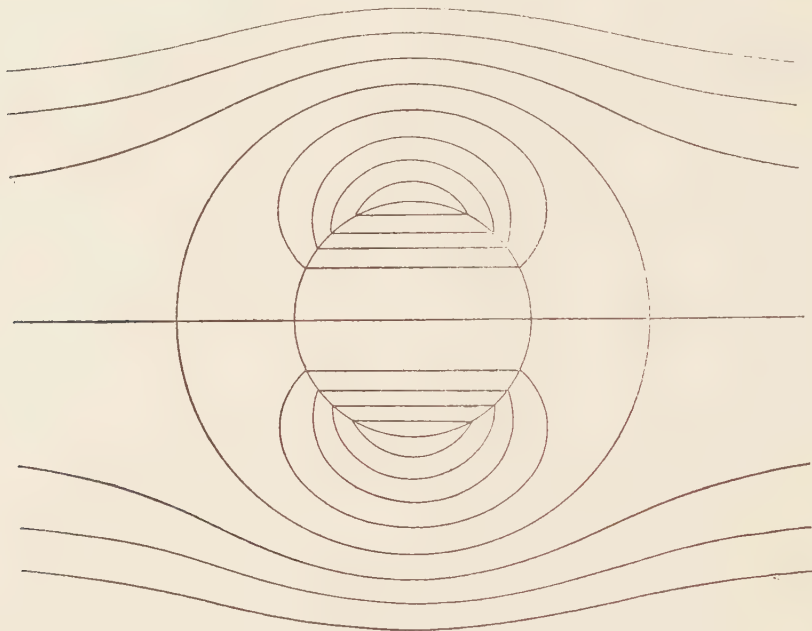


Fig. 20. Kugel im Parallelstrom, wenn s negativ ist.

$s = -7\sigma$ gesetzt, so daß der Radius 69 (g) der kugelförmigen Stromröhre gleich $2d$ wird.

71. Volumändernde Kugel im Parallelfelde. — Die eben gezeichneten Felder sind symmetrisch um die gemeinschaftliche Translationsrichtung als Achse, und haben außerdem eine Symmetrieebene, die Äquatorebene der Kugel. Die geometrischen Symmetrieeigenschaften des Feldes stehen mit den später zu entwickelnden dynamischen Eigenschaften derselben in enger Beziehung.

Die in Bezug auf die Äquatorebene bestehende Symmetrie wird sofort verloren gehen, wenn die Kugel zugleich veränderliches Volumen hat, so daß die Potentiale innerhalb und außerhalb die Formen

$$\Psi = \frac{1}{2} \frac{r^2}{d} \dot{d} + \dot{a}(x-a) + \dot{b}(y-b) + \dot{c}(z-c)$$

$$(a) \quad \varphi = \dot{\alpha}(x-a) + \dot{\beta}(y-b) + \dot{\gamma}(z-c) - \frac{d^2}{r} \dot{d} - \frac{1}{2} \frac{d^2}{r^3} \{(\dot{a}-\dot{\alpha})(x-a) + (\dot{b}-\dot{\beta})(y-b) + (\dot{c}-\dot{\gamma})(z-c)\}$$

haben. Ist aber die Translationsrichtung der Kugel der Bewegungsrichtung im Parallelfelde gleich oder entgegengesetzt, so wird das Feld ein Umdrehungsfeld bleiben, und die solenoidale Darstellung desselben kann gefunden werden, wenn man das Feld der Figur 1 auf ein Feld von der durch die Figuren 17—20 gegebenen Typen legt. Dafs das einfache Parallelfeld (Fig. 9) auch zu diesen Typen gehört, ist dabei zu beachten. In allen Fällen muß das innere Feld als ein nicht solenoidales ausgeschlossen werden.

Besonders einfach ist der Fall, wo die Kugel in ihrer Translation genau dem Parallelstrome folgt, so dafs $\dot{a} = \dot{\alpha}$, $\dot{b} = \dot{\beta}$, $\dot{c} = \dot{\gamma}$ oder $\dot{s} = \dot{\sigma}$. Das Potential wird dann einfach:

$$(b) \quad \varphi = \dot{\alpha}(x-a) + \dot{\beta}(y-b) + \dot{\gamma}(z-c) - \frac{d^2}{r} \dot{d},$$

oder auch, wenn wir Polarkoordinaten benutzen, und gleichzeitig die Volumausdehnungsgeschwindigkeit \dot{E} einführen:

$$(b') \quad \varphi = \dot{\sigma} r \cos \theta - \frac{d^2}{r} \dot{d} = \dot{\sigma} r \cos \theta - \frac{\dot{E}}{4\pi r}.$$

Die solenoidale Darstellung dieses Feldes findet man einfach durch Superposition der Figuren 1 und 9, welche Radialfeld und Parallelfeld darstellen. Denken wir uns die Pulsationsintensität relativ stark, und verzichten wir, wie in den Figuren 1—3, auf die Darstellung der Stromlinien ganz bis zur Oberfläche der Kugel, so brauchen wir auch nur das Radialfeld und das Parallelfeld zu berücksichtigen, und können von den kleinen Modifikationen absehen, die auf der Translation der Kugel beruhen.

Figur 21 stellt das durch diese Superpositionskonstruktion erhaltene Feld dar. Die Kugel ist in Expansion begriffen, und der Strom setzt von links nach rechts ein. Das Feld ist, wie man sieht, ein unsymmetrisches, links von der Kugel, wo der Parallelstrom gegen den Radialstrom geht, ist es mit dem Felde der Figur 2 zwischen zwei expandierenden Kugeln verwandt, auch hier tritt auf der Symmetrieachse ein neutraler Punkt auf. Um den Abstand desselben

von der Kugel zu berechnen, bemerken wir, daß nach (a) die Radialkomponente der Geschwindigkeit

$$(c) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \dot{\sigma} \cos \theta + \frac{d^2}{r^2} \dot{d}$$

ist. Auf dem negativen Teile der Symmetrieachse, für $\theta = \pi$, wird diese Geschwindigkeit verschwinden, wenn

$$(d) \quad r = d \sqrt{\frac{\dot{d}}{\dot{\sigma}}}.$$

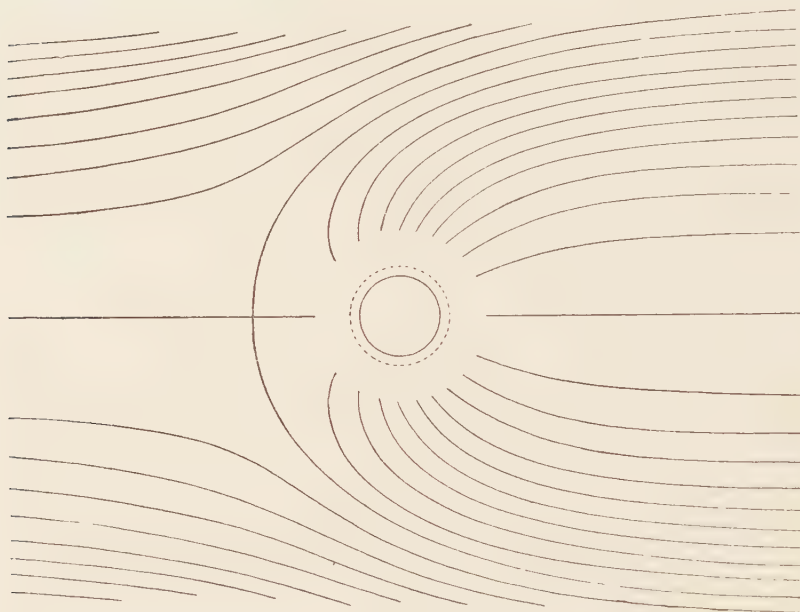


Fig. 21. Volumändernde Kugel im Parallelfeld.

Durch diesen Punkt geht eine singuläre Stromkurve parabolischer Form; wenn die Figur um ihre Symmetrieachse rotiert, wird sie eine parabolische Fläche erzeugen, in welche der ganze von der volumändernden Kugel ausgehende und durch den Parallelstrom umgebogene Radialstrom eingekapselt ist. Auf der rechten Seite der Kugel kommt keine neutrale Stelle vor, sondern das Feld ist mit demjenigen der Figur 3 zwischen einer expandierenden und einer kontrahierenden Kugel verwandt.

Aus der Asymmetrie dieses Feldes folgt eine wichtige einfache Eigenschaft, welche den eben betrachteten symmetrischen Feldern fehlt: Verändert man bei diesen das Vorzeichen der Geschwindigkeit

der Kugel oder des Parallelfeldes, so kommt man zu einem vollständig neuen Felde; beispielsweise von dem Felde der Figur 17 zu demjenigen der Figur 20. Verändern wir aber bei den asymmetrischen Feldern das Vorzeichen, so bleibt das Feld sich selbst ähnlich, und wird nur umgelegt, so daß der neutrale Punkt auf die andere Seite der Kugel fällt.

72. Ruhende oder bewegte Kugel in einem Deformationsfelde. — Ist der Einfallstrom ein durch das Potential

$$(a) \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} \dot{\alpha}_\alpha (x-a)^2 + \frac{1}{2} \dot{\beta}_\beta (y-b)^2 + \frac{1}{2} \dot{\gamma}_\gamma (z-c)^2 \\ + \dot{\beta}_\gamma (z-c)(y-b) + \dot{\gamma}_\alpha (z-c)(x-a) + \dot{\alpha}_\beta (x-a)(y-b)$$

gegebener Deformationsstrom, so wird nach 65(e) das Potential einer Kugel, welche sich unter Volumänderung durch dieses Feld bewegt, zur Zeit, wo der Mittelpunkt der Kugel sich im Feldcentrum befindet:

$$(b) \quad \varphi = -\frac{d^2}{r} d \\ - \frac{1}{2} \frac{d^3}{r^3} \left\{ d(x-a) + b(y-b) + c(z-c) \right\} + \left(1 + \frac{2}{3} \frac{d^5}{r^5} \right) \varphi_2.$$

Ist die Kugel in Ruhe, so reduziert sich das Potential auf

$$(c) \quad \varphi = \left(1 + \frac{2}{3} \frac{d^5}{r^5} \right) \varphi_2.$$

Ist das Deformationsfeld um eine Achse symmetrisch, so läßt sich φ_2 nach 56(c) in der Form

$$(d) \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} \delta r^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

schreiben. Die Darstellung der Stromröhren des entsprechenden Feldes erhält man durch die Superpositionskonstruktion aus den Figuren 12 und 16; es ergibt sich eine Figur, in der die Stromlinien des Deformationsfeldes sich um die Kugel herumbiegen, in ähnlicher Weise, wie in der Figur 19 die Stromlinien des Parallelfeldes.

Denken wir uns jetzt die Kugel volumändernd, so findet man das Feld, wenn man auf die eben beschriebene Figur Figur 1 superponiert. Verzichten wir wieder auf die Darstellung der Stromlinien in der unmittelbaren Nähe der Kugeloberfläche, so brauchen wir nur das Radialfeld der Figur 1 auf das Deformationsfeld der Figur 12

zu legen und die Superpositionskonstruktion auszuführen. Je nach dem gegenseitigen Vorzeichen des Parallelfeldes und des Radialfeldes erhält man zwei verschiedene Felder. Wir merken uns aber, daß sie beide symmetrisch sind, sowohl um die Rotationsachse des Feldes, als zu einer zu dieser Achse senkrechten Ebene, wie man sofort sieht, wenn man den Ausdruck des Potentials aufschreibt. Da sie einander nahe verwandt sind, brauchen wir nur das eine zu zeichnen. In der Figur 22 ist die Kugel in Expansion begriffen, während der Deformationsstrom längs der Symmetrieachse von beiden Seiten gegen die Kugel einsetzt. Der von der Kugel ausgehende Strom

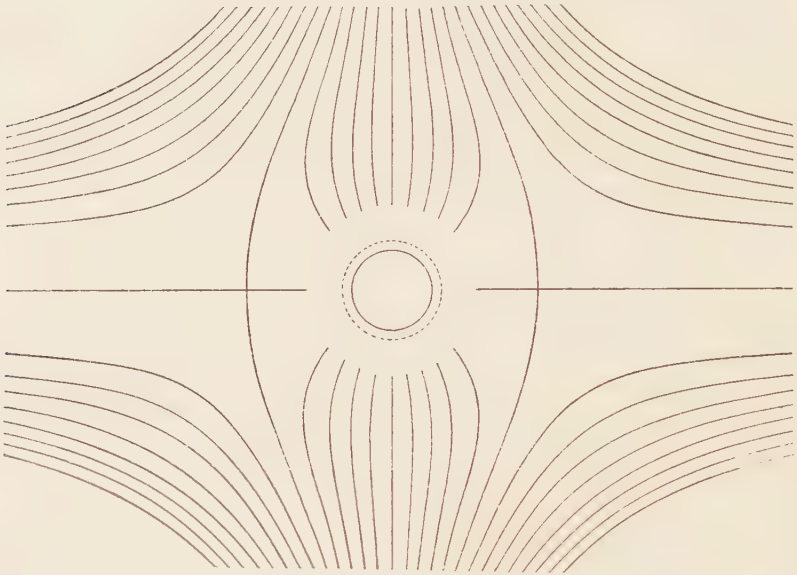


Fig. 22. Volumändernde Kugel im Deformationsfeld.

wird, wie man sieht, zu einem scheibenförmigen Raume senkrecht zur Symmetrieachse zusammengedrängt. Würde man die Bewegungsrichtung im Deformationsstrome ändern, so würde man das andere Feld erhalten, wo der Radialstrom zu einer die Rotationsachse umgebenden Röhre ausgezogen ist.

Hat die Kugel unveränderliches Volumen, und schreitet sie längs der Rotationsachse des Feldes fort, so wird diese Achse Symmetrieachse bleiben. Die Symmetrie zu der zu dieser Achse senkrechten Ebene wird dagegen verloren gehen, wie man aus der Figur 23 sieht, die durch die Superpositionskonstruktion aus den Figuren 7 und 12 erhalten ist. Mit dieser Asymmetrie folgt noch die Eigen-

schaft, die wir für die volumändernde Kugel im Parallelfelde beobachten: Bei Veränderung des Vorzeichens, entweder des Deformationsfeldes oder der Geschwindigkeit der Kugel, bleibt das Feld sich selbst ähnlich und wird nur umgelegt.

73. Eine unter Volumänderung bewegte Kugel in einem beliebigen Einfallsstrome. — Es bewege sich jetzt die Kugel unter Volumänderung, so daß das innere Aktionspotential

$$(a) \quad \Phi = \frac{1}{2} \frac{r^2}{d} d^2 + \dot{a}(x - a) + \dot{b}(y - b) + \dot{c}(z - c)$$

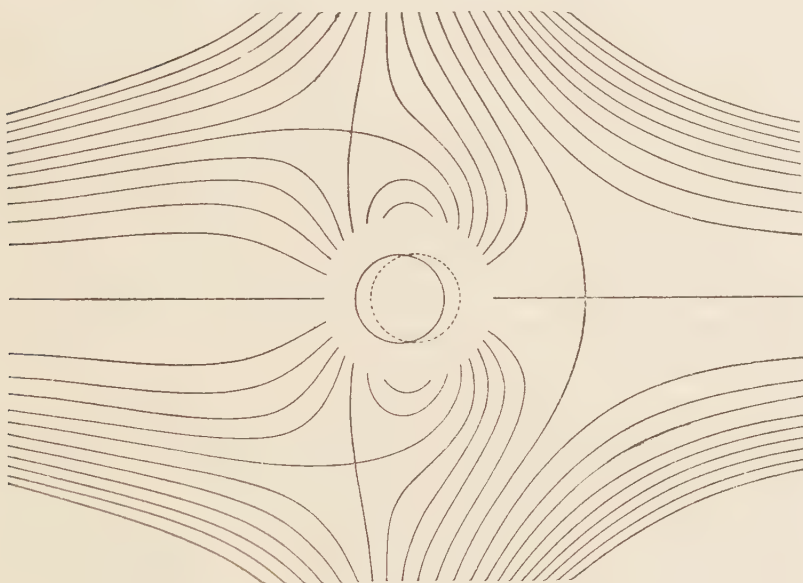


Fig. 23. Fortschreitende Kugel im Deformationsfeld.

wird. Der Einfallsstrom sei ein ganz beliebiger Potentialstrom, von dessen Potential wir jedoch nur die oben vollständig diskutierten Glieder aufschreiben:

$$\begin{aligned} \varphi_\gamma &= \varphi_\gamma^0 \\ &+ \dot{a}(x - a) + \dot{b}(y - b) + \dot{c}(z - c) \\ (b) \quad &+ \frac{1}{2} \dot{a}_\alpha (x - a)^2 + \frac{1}{2} \dot{\beta}_\beta (y - b)^2 + \frac{1}{2} \dot{\gamma}_\gamma (z - c)^2 \\ &+ \dot{\beta}_\gamma (y - b)(z - c) + \dot{\gamma}_\alpha (z - c)(x - a) + \dot{\alpha}_\beta (x - a)(y - b) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Das Potential der Flüssigkeitsbewegung in der Umgebung der Kugel läßt sich dann

$$\begin{aligned}
 \varphi = & \varphi_r^0 - \frac{d^2}{r} \dot{d} \\
 & + \dot{\alpha}(x-a) + \dot{\beta}(y-b) + \dot{\gamma}(z-c) \\
 & - \frac{1}{2} \frac{d^3}{r^3} \left\{ (\dot{\alpha}-\ddot{\alpha})(x-a) + (\dot{\beta}-\ddot{\beta})(y-b) + (\dot{\gamma}-\ddot{\gamma})(z-c) \right\} \\
 (c) \quad & + \left(1 + \frac{2}{3} \frac{d^5}{r^5} \right) \left\{ \frac{1}{2} \dot{\alpha}_\alpha (x-a)^2 + \frac{1}{2} \dot{\beta}_\beta (y-b)^2 + \frac{1}{2} \dot{\gamma}_\gamma (z-c)^2 \right. \\
 & \left. + \dot{\beta}_\gamma (y-b)(z-c) + \dot{\gamma}_\alpha (z-c)(x-a) + \dot{\alpha}_\beta (x-a)(y-b) \right\} \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

schreiben. Die durch Punkte angedeuteten Glieder enthalten die Potentiale der höheren Deformationsströme und die entsprechenden von der Kugel herrührenden Reaktionspotentiale.

Die einzelnen Bestandteile dieses zusammengesetzten Feldes haben wir jetzt umständlich diskutiert, und können durch fortgesetzte Superposition zur geometrischen Darstellung des Gesamtfeldes gelangen.

Das Aussehen des resultierenden Feldes wird sehr verschieden ausfallen, je nach der relativen Intensität der Einzelfelder. Ist der Parallelstrom relativ stark, und der Deformationsstrom relativ schwach, wie es im allgemeinen der Fall sein wird, wenn der Einfallstrom von einer oder mehreren entfernten, bewegten Kugeln herrührt, so wird der Einfallstrom für sich durch schwach gekrümmte und schwach divergierende Stromlinien wie diejenigen der Figuren 13 und 14 dargestellt. Werden dann die Geschwindigkeitskomponenten der Kugel sehr schwach, verglichen mit denjenigen des Feldes, so werden die Stromlinien wesentlich nur ein Umbiegen um die Kugel zeigen, etwa wie in der Figur 19. Sind dagegen die Geschwindigkeitskomponenten der Kugel von derselben Größenordnung wie diejenigen der entfernten Kugeln, welche den Einfallstrom erzeugen, so wird das Feld im wesentlichen dasjenige der Figuren 1, 7 und 8 sein, nur ganz unbedeutend wegen des Vorhandenseins des schwachen Einfallstromes modifiziert. Schon wenn die gegenseitigen Abstände der Kugeln nur das Zehnfache der Radien derselben betragen, wie in den Figuren 2 und 3, werden die durch den Einfallstrom erzeugten Modifikationen der Bewegung in der unmittelbaren Nähe

der Kugel nur Größen von der Ordnung der Dicke der in den Figuren benutzten Linien sein. Nichtsdestoweniger bleibt aber das thatsächliche Vorhandensein dieses schwachen Einfallsstromes und der Reaktion der Kugel gegen denselben von fundamentaler Bedeutung für die dynamischen Erscheinungen.

Siebenter Abschnitt.

Das Geschwindigkeitspotential eines Kugelsystems.

74. Methode der successiven Approximation für die Lösung des Problems von n Kugeln. — Nach der Bestimmung des Reaktionspotentials einer Kugel können wir eine Methode angeben, um das Problem der Bewegung beliebig vieler Kugeln in der Flüssigkeit durch successive Approximation zu lösen.

Es seien also n Kugeln gegeben. Die Indices $g, h, i, j, k \dots$ sollen beliebige Zahlen zwischen 1 und n bedeuten. Die Bewegungen innerhalb der Kugeln sind durch die n inneren Aktionspotentiale

$$\Phi_g, \Phi_h, \Phi_i \dots \Phi_k \dots$$

gegeben. Die Aufgabe ist, das Potential φ zu suchen, welches die solenoidale Fortsetzung dieser n Potentiale im äußeren Raume bildet. Ob dabei diese Φ von der beschränkteren Form 35(a) sind, oder die allgemeinste Form 63(a) haben, ist für die zu entwickelnde Methode gleichgültig.

Als die Lösung des Problems in der ersten Annäherung haben wir schon das Potential

$$(a) \quad \sum^g \varphi_g$$

aufgestellt, wo φ_g das äußere Aktionspotential der Kugel g ist, 35(b) oder 63(b), wenn diese eine Kugel als allein vorhanden gedacht wird. Diese Lösung erfüllt aber nur angenähert die Grenzflächenbedingung, nämlich nur, in so fern wir an der Oberfläche einer Kugel h den von den $n - 1$ entfernten Kugeln herrührenden Einfallsstrom vernachlässigen, in Vergleich zu dem von h selbst herrührenden Aktionsstrom.

Diesen Fehler können wir aber verringern durch Hinzufügen

des Reaktionspotentials der Kugel h gegen den von den $n - 1$ entfernten Kugeln herrührenden Einfallsstrom. Betrachten wir besonders den von der Kugel g herrührenden Strom und entwickeln das Potential φ_g dieses Stromes in der Umgebung des Punktes h , so können wir sofort nach 65(c) das Reaktionspotential φ_{gh} der Kugel h gegen den von der Kugel g herrührenden Einfallsstrom aufschreiben. Den $n - 1$ Einfallspotentialen werden $n - 1$ solche Reaktionspotentiale entsprechen, wo g alle Werte zwischen 1 und n durchläuft, mit Ausnahme des besonderen Wertes h . Das Reaktionspotential der Kugel h gegen den totalen von den $n - 1$ entfernten Kugeln herrührenden Einfallsstrom läßt sich deshalb

$$\sum_{g \neq h}^n \varphi_{gh}$$

schreiben. Da jede der n Kugeln ein solches Reaktionspotential gegen den von den $n - 1$ anderen Kugeln herrührenden Einfallsstrom erzeugt, so führt die Berücksichtigung aller dieser Reaktionsströme auf den nächsten Annäherungswert

$$(b) \quad \sum_g \varphi_g + \sum_g \sum_{h \neq g} \varphi_{gh}$$

des gesuchten Potentials.

Dieser Ausdruck erfüllt wieder die Grenzflächenbedingung nur angenähert, nämlich insofern wir die Geschwindigkeit des Reaktionsstromes φ_{gh} in der Nähe einer Kugel j vernachlässigen. Diesen Fehler können wir jedoch wieder durch die Hinzufügung neuer Reaktionspotentiale φ_{ghi} verringern, die in derselben Weise durch Entwicklung von φ_{gh} in der Umgebung von i gefunden werden. Alle Reaktionspotentiale zweiter Ordnung erhält man dann durch dreifache Summation nach g, h, i , wobei aber immer h von g , und i von h verschieden sein muß.

Fährt man in dieser Weise fort, die Reaktionspotentiale immer höherer Ordnungen hinzuzufügen, so kommt man zu der Reihe:

$$(c) \quad \begin{aligned} \varphi = & \sum_g \varphi_g + \sum_g \sum_{h \neq g} \varphi_{gh} + \sum_g \sum_{h \neq g} \sum_{i \neq h} \varphi_{ghi} + \dots \\ & + \sum_g \sum_{h \neq g} \dots \sum_{p \neq h} \varphi_{ghip} + \dots \end{aligned}$$

wo alle Indices die Zahlen 1 bis n durchlaufen sollen, aber in der

Weise, daß immer zwei unmittelbar nacheinander folgende Indices verschieden sind.¹

75. Allgemeine Bemerkungen über die Potentialreihe. — Es verdient bemerkt zu werden, daß die Form der eben gefundenen Reihe ganz unabhängig ist von der Voraussetzung, daß die Körper $g, h \dots$ Kugelform haben. Sind überhaupt n Körper beliebiger Form gegeben, und kann man für jeden einzelnen derselben das allgemeinste Aktionspotential und folglich auch das allgemeinste Reaktionspotential bestimmen, so giebt die Reihe 74(c) die formelle Lösung, wenn alle Körper gleichzeitig vorhanden sind. Auch die besondere Form der Grenzflächenbedingung wird auf die Form der Reihe keinen Einfluß ausüben; die Reihe wird genau dieselbe Form haben, wenn man an den Grenzflächen beispielsweise potentiellen, anstatt solenoidalen Anschlusses an die gegebenen inneren Potentiale verlangt. Nur wird man mit veränderten Grenzflächenbedingungen andere Formen der Aktions- und der Reaktionspotentiale erhalten.

Sonst wird die Brauchbarkeit der Reihe immer davon abhängen, ob die Berücksichtigung einer beschränkten Anzahl von Gliedern die Lösung des Problems mit genügender Annäherung giebt. Wenn man in der Nähe eines Körpers k die von den $n - 1$ übrigen Körpern herrührenden Reaktionsströme von einer gewissen Ordnungszahl an vernachlässigen kann, so ist die Aufgabe mit befriedigender Annäherung gelöst.

Kann man schliesslich beweisen, daß die unbegrenzt fortgesetzte Reihe 74(c) konvergiert, so wird die Summe φ dieser Reihe das gesuchte Potential im äusseren Raume exakt darstellen.

Wir werden im folgenden keine Anwendung von der vollständigen Reihe machen, und wir brauchen deshalb nicht auf die Konvergenzuntersuchungen einzugehen. Wir werden uns immer auf solche Fälle beschränken, wo die ersten Glieder der Reihe rasch konvergieren, und werden dabei die Größenordnung der gemachten Fehler untersuchen.

76. Das Potential in der Nähe einer bestimmten Kugel. — Wir greifen aus der Reihe 74(c) besonders diejenigen Glieder heraus, welche die bestimmte Zahl g als letzten Index haben. Diese Glieder für sich bilden die partielle Reihe

¹ C. A. BJERKNES, Sur le mouvement simultané etc., Formel (49).

$$(a) \quad \varphi_G = \varphi_g + \sum_{h \geq g}^h \varphi_{hg} + \sum_{i \geq h \geq g}^i \sum^h \varphi_{ihg} + \dots,$$

welche das Aktionspotential der Kugel g und sämtliche Reaktionspotentiale dieser Kugel gegen sämtliche von den anderen Kugeln herrührende Ströme enthält. Alle Glieder dieser Reihe haben im Punkte g eine singuläre Stelle, aber verhalten sich sonst im ganzen Raume regulär. Offenbar ist die vollständige Reihe φ aus n Reihen dieser Form zusammengesetzt:

$$(b) \quad \varphi = \sum_1^n \varphi_G$$

Will man die Bewegung besonders in der Nähe einer bestimmten Kugel g untersuchen, so geht man von der Form (b) leicht zu der folgenden Form über:

$$(c) \quad \varphi = \varphi_g + \sum_{h \geq g}^h (\varphi_h + \varphi_{hg}) + \sum_{i \geq h \geq g}^i \sum^h (\varphi_{ih} + \varphi_{ihg}) + \dots$$

Das erste Glied enthält hier das Aktionspotential der Kugel g ; das zweite enthält die Aktionspotentiale φ_h der $n - 1$ anderen Kugeln und die entsprechenden $n - 1$ Reaktionspotentiale erster Ordnung der Kugel g . Das dritte Glied enthält die Reaktionspotentiale erster Ordnung der $n - 1$ Kugeln h und die entsprechenden Reaktionspotentiale zweiter Ordnung der Kugel g , und so weiter. Das erste Glied dieser Reihe hat die Eigenschaft, an der Oberfläche der Kugel eine Normalkomponente zu haben, welche mit der Normalkomponente der Bewegung innerhalb der Kugel identisch ist. Alle folgenden Glieder dagegen, welche aus Einfallspotentialen in Verbindung mit den entsprechenden Reaktionspotentialen bestehen, stellen Bewegungen dar, welche an der Oberfläche der Kugel die Normalkomponente Null haben.

Setzen wir endlich

$$(d) \quad \varphi_\gamma = \sum_{h \geq g}^h \varphi_h + \sum_{i \geq h \geq g}^i \sum^h \varphi_{ih} + \dots,$$

$$(e) \quad \varphi_{\gamma g} = \sum_{h \geq g}^h \varphi_{hg} + \sum_{i \geq h \geq g}^i \sum^h \varphi_{ihg} + \dots,$$

so erhält das Potential in der Nähe von g die Form

$$(f) \quad \varphi = \varphi_g + (\varphi_\gamma + \varphi_{\gamma g}).$$

Wir sind dann auf die Form zurückgekommen, welche wir in 66(b) für das Potential der Bewegung der Kugel in einem Strom gegeben haben, nur daß jetzt dieser Strom φ_γ so bestimmt ist, daß er von dem Vorhandensein und der Bewegung der $n - 1$ anderen Kugeln herrührt.

77. Entwickelte Form des Potentials in der Nähe einer Kugel. —

Wenn wir die dynamische Wechselwirkung einer Kugel und der umgebenden Flüssigkeit studieren sollen, so ist es die Flüssigkeitsbewegung in der unmittelbaren Umgebung der Kugel, worauf alles ankommt. Die Form 76(f) für das Potential des Kugelsystems wird deshalb besonders zur Verwendung kommen. Wir bringen es jetzt auf dieselbe entwickelte Form, wie das Potential 73(c), wo die Kugel noch nicht als dem Kugelsystem angehörig gedacht ist.

Um dieses durchzuführen, entwickeln wir zunächst φ_γ in der Umgebung des Punktes a_g, b_g, c_g nach TAYLOR'S Theorem:

$$\begin{aligned} \varphi_\gamma &= (\varphi_\gamma)_g \\ &+ \left(\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x} \right)_g (x - a_g) + \left(\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial y} \right)_g (y - b_g) + \left(\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial z} \right)_g (z - c_g) \\ (a) \quad &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial x^2} \right)_g (x - a_g)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial y^2} \right)_g (y - b_g)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial z^2} \right)_g (z - c_g)^2 \\ &+ \left(\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial y \partial x} \right)_g (y - b_g)(x - a_g) + \left(\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial z \partial x} \right)_g (z - c_g)(x - a_g) + \left(\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial z \partial y} \right)_g (z - c_g)(y - b_g) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Das erste Glied $(\varphi_\gamma)_g$ bedeutet hier den Wert von φ_γ , wenn man darin $x = a_g, y = b_g, z = c_g$ substituiert hat, und die den Differentialquotienten beigegefügt Indices g bedeuten, daß nach vollführter Differentiation in Bezug auf x, y, z dieselbe Substitution ausgeführt werden soll.

Die Formel 76(f) können wir jetzt explicite aufschreiben, da das erste Glied φ_g die bekannte Form 35(b) hat, während $\varphi_{\gamma g}$ das dem Einfallspotential φ_γ entsprechende Reaktionspotential ist. Der Formel 73(c) entsprechend erhalten wir dann:

$$\begin{aligned}
 (b) \quad \varphi &= (\varphi_\gamma)_g - \frac{d_g^2}{r_g} \dot{d}_g \\
 &+ \left(\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x} \right)_g (x - a_g) + \left(\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial y} \right)_g (y - b_g) + \left(\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial z} \right)_g (z - c_g) \\
 &- \frac{1}{2} \frac{d_g^3}{r_g^3} \left\{ \left(\dot{a}_g - \left(\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x} \right)_g \right) (x - a_g) + \left(\dot{b}_g - \left(\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial y} \right)_g \right) (y - b_g) + \left(\dot{c}_g - \left(\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial z} \right)_g \right) (z - c_g) \right\} \\
 &+ \left(1 + \frac{2}{3} \frac{d_g^5}{r_g^5} \right) \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial x^2} \right)_g (x - a_g)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial y^2} \right)_g (y - b_g)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial z^2} \right)_g (z - c_g)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial y \partial z} \right)_g (y - b_g)(z - c_g) + \left(\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial z \partial x} \right)_g (z - c_g)(x - a_g) + \left(\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial x \partial y} \right)_g (x - a_g)(y - b_g) \right\} \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

Benutzen wir also die explicite diskutierte Formel 73(c) zur Darstellung der Bewegung in der Umgebung einer Kugel, so kommen wir zu dem Falle, daß diese Kugel die unserem Kugelsystem angehörende Kugel g ist, durch die Substitutionen

$$\begin{aligned}
 \varphi_\gamma^0 &= (\varphi_\gamma)_g \\
 \alpha &= \left(\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x} \right)_g, & \beta &= \left(\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial y} \right)_g, & \gamma &= \left(\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial z} \right)_g, \\
 (c) \quad \alpha_\alpha &= \left(\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial x^2} \right)_g, & \beta_\beta &= \left(\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial y^2} \right)_g, & \gamma_\gamma &= \left(\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial z^2} \right)_g, \\
 \beta_\gamma &= \left(\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial y \partial z} \right)_g, & \gamma_\alpha &= \left(\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial z \partial x} \right)_g, & \alpha_\beta &= \left(\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial x \partial y} \right)_g, \\
 &\dots & \dots & \dots
 \end{aligned}$$

wo φ_γ als das Potential des von den $n - 1$ entfernten Kugeln herrührenden Einfallstromes ist. q wird den Flüssigkeitsstrom um so genauer darstellen, je genauer man φ_γ in Betracht zieht.

78. Verschiedene Grade der Annäherung. — In der ersten Annäherung vernachlässigt man φ_γ ganz, solange es sich um den Bewegungszustand in der unmittelbaren Nähe der Kugel g handelt. Dieses entspricht dem Annäherungsgrade unserer ersten Lösung 38(a), wo wir bei der Erfüllung der Oberflächenbedingung von dem von den entfernten Kugeln herrührenden Strome ganz absahen.

In der zweiten Annäherung berücksichtigen wir das erste Glied in der Entwicklung von φ_γ

$$(a) \quad \varphi_\gamma = \sum_{h \geq g}^h \varphi_h.$$

Das heisst, wir stellen uns den Einfallsstrom in der Umgebung der Kugel g als einfach aus den Aktionsströmen der $n - 1$ entfernten Kugeln zusammengesetzt vor. In diesem Falle können wir uns einer Vereinfachung bedienen. Das φ_h nach der Substitution $x = a_g$, $y = b_g$, $z = c_g$ nimmt die Form

$$(\varphi_h)_g = -\frac{d_h^2}{r_{hg}} \dot{d}_h - \frac{1}{2} \frac{d_h^3}{r_{hg}^3} \left\{ \dot{a}_h (a_g - a_h) + \dot{b}_h (b_g - b_h) + \dot{c}_h (c_g - c_h) \right\}$$

an, wo

$$r_{hg} = \sqrt{(a_g - a_h)^2 + (b_g - b_h)^2 + (c_g - c_h)^2}.$$

Bei der Bildung der Koeffizienten 77(c) können wir dann das aus der Substitution hervorgegangene $(\varphi_h)_g$ zu Grunde legen, und die Differentiation nach a_g, b_g, c_g ausführen. Wir bekommen dann, wenn wir statt $(\varphi_h)_g$ abkürzend φ_h schreiben, was ohne Zweideutigkeit gemacht werden kann:

$$(b) \quad \begin{aligned} \dot{\alpha} &= \sum_{h \geq g}^h \frac{\partial \varphi_h}{\partial a_g}, & \dot{\beta} &= \sum_{h \geq g}^h \frac{\partial \varphi_h}{\partial b_g}, & \dot{\gamma} &= \sum_{h \geq g}^h \frac{\partial \varphi_h}{\partial c_g}, \\ \dot{\alpha}_\alpha &= \sum_{h \geq g}^h \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial a_g^2}, & \dot{\beta}_\beta &= \sum_{h \geq g}^h \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial b_g^2}, & \dot{\gamma}_\gamma &= \sum_{h \geq g}^h \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial c_g^2}, \\ &\dots & \dots & \dots \end{aligned}$$

In der dritten Annäherung muß man zwei Glieder der Entwicklung von φ_γ berücksichtigen. Im Einfallsstrom φ_γ werden dann auch die von den $n - 1$ entfernten Kugeln ausgehenden Reaktionsströme in Betracht gezogen:

$$(c) \quad \varphi_\gamma = \sum_{h \geq g}^h \varphi_h + \sum_{i \geq h \geq g}^i \sum^h \varphi_{ih}.$$

Bei der Berücksichtigung des Gliedes φ_{ih} darf man im allgemeinen die Substitution $x = a_g, \dots$ nicht mehr vor der Differentiation ausführen. Denn wenn der Index alle Werte zwischen 1 und n annimmt, nur den Wert h ausgenommen, so wird auch der Fall $i = g$

eintreten. Das heißt, unter den Reaktionspotentialen φ_{ih} kommen auch solche φ_{gh} vor, welche von dem von g selbst ausgehenden Aktionsstromen herrühren. Dieses φ_{gh} enthält schon a_g, b_g, c_g , und man wird zu verschiedenen Resultaten kommen, je nachdem man nach x, y, z differentiiert und nachher die Substitutionen $x = a_g, y = b_g, z = c_g$ ausführt, oder erst diese Substitution ausführt und nachher nach a_g, b_g, c_g differentiiert. In diesem Falle muß man also zu den ursprünglichen Formeln 77(c) zurückkehren.

Dritter Teil.

Einfluß des Flüssigkeitsdruckes auf die Bewegung einer Kugel.

Erster Abschnitt.

Berechnung der Druckkraft gegen eine Kugel.

79. Der Druck. — Nachdem jetzt die vorbereitende kinematische Aufgabe erledigt ist, werden wir die dynamische Wechselwirkung zwischen Kugeln und Flüssigkeit zu dem Gegenstand unserer Untersuchungen machen. Dabei werden wir in diesem Teil nur die Wechselwirkung zwischen einer einzigen Kugel und der sie unmittelbar umgebenden Flüssigkeit untersuchen, um dann in dem nächstfolgenden Teil diese Kugel als eine beliebige, dem Kugelsystem angehörende zu betrachten.

Die einzige Bewegungsursache in der Flüssigkeit ist der Druck p , welcher sofort berechnet werden kann, wenn man das Potential φ der herrschenden Bewegung und den im Ruhezustand herrschenden Druck P kennt. Nach 15(c) Seite 22 ist nämlich:

$$(a) \quad p = P - q \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} q \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\}.$$

Der Druck ist also eine Funktion des Geschwindigkeitspotentials φ . Dasselbe tritt in der von uns zu verwendenden Form 73(c) als eine Funktion von $x - a$, $y - b$, $z - c$ auf, wo a , b , c die Koordinaten des Mittelpunktes der Kugel sind. Dieses Umstandes können wir uns bedienen, um die Formel (a) auf eine für unsere Rechnungen zweckmäßigere Form zu bringen.

Bei der im zweiten Glied rechts vorkommenden Differentiation

nach der Zeit scheiden wir nämlich diejenigen Glieder aus, welche durch Differentiation nach dem in den drei Parametern a, b, c enthaltenen t entstehen. Also:

$$-q \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -q \frac{\delta \varphi}{\delta t} - q \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} \dot{b} + \frac{\partial \varphi}{\partial c} \dot{c} \right\}.$$

Ersetzen wir dann, wie in 27(d), die positiven Ableitungen nach a, b, c durch die negativen Ableitungen nach x, y, z , so wird

$$-q \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -q \frac{\delta \varphi}{\delta t} + q \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \dot{a} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \dot{b} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \dot{c} \right\}.$$

Führt man dieses in (a) ein und ergänzt noch durch Addition und Subtraktion von

$$\frac{1}{2} q \{ \dot{a}^2 + \dot{b}^2 + \dot{c}^2 \},$$

so läßt sich die Druckformel in der neuen Form

$$(b) \quad p = \Pi - q \frac{\delta \varphi}{\delta t} - \frac{1}{2} q \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \dot{a} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \dot{b} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \dot{c} \right)^2 \right\}$$

schreiben.

Der Druck tritt also wie in (a) als die Summe von drei Partialdrucken auf. Der erste Partialdruck Π hat die Form

$$(c) \quad \Pi = P + \frac{1}{2} q (a^2 + b^2 + c^2)$$

und ist also, genau wie der statische Druck P , eine nie von den Koordinaten, sondern höchstens von der Zeit abhängige Gröfse. Den zweiten Partialdruck

$$(d) \quad -q \frac{\delta \varphi}{\delta t},$$

welcher besonders von den Beschleunigungen in der vorliegenden Bewegung abhängt, werden wir als den impulsiven Druck bezeichnen. Der Wert des dritten Partialdruckes

$$(e) \quad -\frac{1}{2} q \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \dot{a} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \dot{b} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \dot{c} \right)^2 \right\}$$

ist proportional der kinetischen Energie, die das im Punkte x, y, z befindliche Flüssigkeitspartikelchen hat, wenn wir seine Bewegung auf das Kugelcentrum a, b, c beziehen. Wir werden deshalb (e) den relativen Energiedruck nennen.

80. Die Druckkraft. — Im Punkte x', y', z' an der Oberfläche der Kugel hat der Druck den Wert p' . Das entsprechende Flächenelement $d\sigma$ der Kugeloberfläche wird infolge dieses Druckes von einer unendlich kleinen Kraft $p' d\sigma$ angegriffen, welche senkrecht zu dem gedrückten Element steht, und folglich längs eines Radius der Kugel gerichtet ist. Alle diese Einzelkräfte setzen sich zu einer einzigen im Mittelpunkt der Kugel angreifenden Resultantkraft zusammen, welche wir die Druckkraft nennen wollen.

Die Druckkraft stellt vollständig denjenigen Einfluß dar, welchen die Flüssigkeit auf die translatorische Bewegung ausübt. Die Bewegung der Kugel in der Flüssigkeit ist mit derjenigen Bewegung identisch, welche dieselbe Kugel im leeren Raum unter dem Einflusse einer äußeren Kraft annehmen würde, welche mit der Druckkraft identisch ist.

Die längs der Koordinatenachsen gerichteten Komponenten der Kraft $p' d\sigma$ gegen ein Flächenelement, welche selbst längs des negativen Radiusvektor gerichtet ist, ergeben sich durch Multiplikation mit den negativen Richtungskosinus des Radiusvektor, nämlich mit:

$$-\frac{x' - a}{d}, \quad -\frac{y' - b}{d}, \quad -\frac{z' - c}{d}.$$

Die Komponenten X, Y, Z der Druckkraft selbst ergeben sich, wenn wir diese einzelnen Kraftkomponenten über die ganze Kugelfläche summieren, sie werden also durch die Integrale

$$\begin{aligned} X &= - \int p' \frac{x' - a}{d} d\sigma \\ (a) \quad Y &= - \int p' \frac{y' - b}{d} d\sigma \\ Z &= - \int p' \frac{z' - c}{d} d\sigma \end{aligned}$$

dargestellt.

Durch einige Sätze allgemeiner Natur werden wir die explicite Berechnung dieser Integrale bedeutend erleichtern können.

81. Die Kugelflächenfunktionen. — Das Geschwindigkeitspotential φ in der Umgebung der Kugel haben wir durch eine Entwicklung nach räumlichen Kugelfunktionen positiven und negativen Grades dargestellt. Die Formel 79 (b) wird den Druck in der Flüssigkeit

durch gewisse Verbindungen dieser räumlichen Kugelfunktionen darstellen.

Die vollständige Verteilung des Druckes in der Flüssigkeit hat für die Bestimmung der Druckkraft keine Bedeutung, sondern alles kommt auf den Wert p' des Druckes in denjenigen Punkten des Raumes an, welche der Kugelfläche angehören, und deren Koordinaten also die Relation

$$(a) \quad (x' - a)^2 + (y' - b)^2 + (z' - c)^2 = d^2$$

erfüllen.

Bei dieser Specialisierung der Aufgabe brauchen wir nicht mehr die in p auftretenden räumlichen Kugelfunktionen zu betrachten, sondern nur die Werte derselben auf der Kugelfläche (a). Den Wert einer räumlichen Kugelfunktion auf der Oberfläche einer Kugel um das Feldcentrum werden wir mit Lord KELVIN und TAIT eine Kugelflächenfunktion nennen. Eine Fundamentealeigenschaft dieser Funktionen wird die Berechnung der Druckkraft sehr vereinfachen.

Zunächst bemerken wir, daß aus korrespondierenden Kugelfunktionen, die also gleicher Ordnung, aber verschiedenen Grades sind (61), Kugelflächenfunktionen entstehen, die sich höchstens voneinander um einen konstanten Faktor unterscheiden. Denn der Faktor $r^{-(2n+1)}$, um welchen sich die zwei korrespondierenden räumlichen Kugelfunktionen voneinander unterscheiden, reducirt sich auf eine Konstante. Wir brauchen deshalb nur von der Ordnung und nicht von dem Grade einer Kugelflächenfunktion zu reden: die Ordnung einer Kugelflächenfunktion ist gleich dem Grade der entsprechenden räumlichen Kugelfunktion positiven Grades.

Ist n diese Ordnungs- oder Gradzahl, so ist die räumliche Kugelfunktion des Grades n ein homogenes Polynom in $x - a$, $y - b$, $z - c$:

$$(b) \quad \varphi_n = \varphi_n(x - a, y - b, z - c),$$

und die entsprechende Kugelflächenfunktion φ'_n ist dieselbe Funktion φ_n von den specialisierten Variablen $x' - a$, $y' - b$, $z' - c$,

$$(c) \quad \varphi'_n = \varphi_n(x' - a, y' - b, z' - c),$$

wo x' , y' , z' die Gleichung (a) erfüllen. Die Kugelflächenfunktion ist also eine Funktion von nur zwei voneinander unabhängigen Veränderlichen.

82. Eine Fundamentealeigenschaft der Kugelflächenfunktion. —

Eine wichtige Eigenschaft der Kugelflächenfunktionen kann man aus dem GREEN'schen Satz folgern. Sind φ und ψ zwei Funktionen, welche sich innerhalb des Volumens τ regulär verhalten, φ' und ψ' ihre Werte auf der Grenzfläche σ des Volumens, ist $d\tau$ das Volumenelement, $d\sigma$ das Flächenelement und n die nach aussen gerichtete Normale dieser Grenzfläche, so lautet dieser Satz:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \int \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} d\tau &= - \int \varphi \nabla^2 \psi d\tau + \int \varphi' \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma \\ &= - \int \psi \nabla^2 \varphi d\tau + \int \psi' \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma. \end{aligned}$$

Es sei nun das Volumen τ eine Kugel $r = d$ um das Feldcentrum, und φ und ψ zwei Kugelfunktionen ganzen positiven Grades, $\varphi = \varphi_m$, $\psi = \varphi_n$. Im Volumen der Kugel ist dann $\nabla^2 \varphi_m = \nabla^2 \varphi_n = 0$. Die kubischen Integrale rechts verschwinden also, und die beiden Flächenintegrale müssen einander identisch gleich sein:

$$\int \varphi_m' \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\sigma = \int \varphi_n' \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} d\sigma.$$

Die Normale n der Kugel fällt mit dem Radius r zusammen. Differenzieren wir deshalb nach r und substituieren nachher $r = d$, so ergibt sich nach 62 (d):

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial n} = \frac{n}{d} \varphi_n, \quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} = \frac{m}{d} \varphi_m.$$

Wenn wir einsetzen und mit d dividieren, folgt:

$$n \int \varphi_m' \varphi_n' d\sigma = m \int \varphi_m' \varphi_n' d\sigma.$$

Sind m und n voneinander verschiedene Zahlen, so muß folglich

$$\text{(b)} \quad \int \varphi_m' \varphi_n' d\sigma = 0$$

sein. Oder:

(A) *Das über eine Kugelfläche um das Feldcentrum berechnete Integral des Produktes von zwei Kugelflächenfunktionen verschiedener Ordnung verschwindet identisch.*

Gleichzeitig merken wir uns einige unmittelbare Folgerungen dieses Satzes, von denen wir bei einer späteren Gelegenheit Gebrauch machen werden.

Setzen wir $m = 0$, so reduciert sich die eine Kugelflächenfunktion auf eine Konstante, und wir erhalten

$$\int \varphi'_n d\sigma = 0,$$

sofern n von Null verschieden ist. Also:

(B) *Das über eine Kugelfläche berechnete Integral einer einzigen Kugelflächenfunktion hat den Wert Null, sofern nicht die Kugelflächenfunktion die Ordnungszahl Null hat und also eine Konstante ist.*

Ferner erinnern wir uns, daß eine räumliche Kugelfunktion die Form des Produktes einer Kugelflächenfunktion in eine Potenz des Radiusvektor hat. Suchen wir deshalb das Volumintegral der räumlichen Kugelfunktion innerhalb einer Kugel um das Feldcentrum, so können wir erst über eine Kugelfläche und dann längs eines Radiusvektor integrieren. Da die erste dieser Integrationen immer nach dem Satze (B) das Resultat Null giebt, sofern nicht die Kugelfunktion von der Ordnung Null ist, so schließen wir:

(C) *Das Volumintegral einer räumlichen Kugelfunktion innerhalb einer Kugel um das Feldcentrum ist Null, sofern nicht die räumliche Kugelfunktion von der Ordnung Null ist.*

83. Die Berechnung von Integralen über die Oberfläche der Kugel. — Mit Hilfe des eben entwickelten Fundamentalsatzes über Kugelflächenfunktionen wird man eine Reihe von Partialdrucken ausscheiden können, die, in die Integrale 80 (a) eingesetzt, das Resultat Null geben. Wo weitere explicite Rechnung notwendig ist, bemerken wir, daß wir nach der Bildungsweise des Druckes aus dem Potential φ sofort schließen können, daß an der Kugeloberfläche der Druck p' genau wie das Potential φ' ein Polynom in $x' - a$, $y' - b$, $z' - c$ sein wird. Wir werden deshalb ausschließlich Integrale von der Form

$$(a) \quad \int (x' - a)^l (y' - b)^m (z' - c)^n d\sigma$$

über die Kugelfläche zu berechnen haben. Solange unter den Exponenten l , m , n eine ungerade Zahl vorkommt, wird dieses Integral in zwei gleiche Teile entgegengesetzten Vorzeichens geteilt werden können, und folglich den Wert Null erhalten. Ein von Null verschiedenes Resultat werden folglich nur Integrale von der Form

$$(b) \quad \int (x' - a)^{2\lambda} (y' - b)^{2\mu} (z' - c)^{2\nu} d\sigma$$

geben können.

Das Integral niedrigster Ordnung dieser Form stellt die Oberfläche der Kugel dar:

$$(c) \quad \int d\sigma = 4\pi d^2.$$

Die nächsten Integrale, dividiert durch den Kugelradius d , stellen das Volumen E der Kugel dar:

$$(d) \quad \frac{1}{d} \int (x' - a)^2 d\sigma = \frac{1}{d} \int (y' - b)^2 d\sigma = \frac{1}{d} \int (z' - c)^2 d\sigma = E.$$

Denn $\frac{x' - a}{d} d\sigma$ ist die Grundfläche, $x' - a$ die Höhe eines cylindrischen, zwischen Diametralebene und Kugelfläche liegenden Volumenelementes der Kugel.

Sind jetzt φ'_1 und ψ'_1 zwei beliebige Kugelflächenfunktionen erster Ordnung,

$$\varphi'_1 = A(x' - a) + B(y' - b) + C(z' - c)$$

$$\psi'_1 = A'(x' - a) + B'(y' - b) + C'(z' - c),$$

so schließt man unmittelbar nach (d), daß

$$(e) \quad \frac{1}{d} \int \varphi_1 \psi_1 d\sigma = E(AA' + BB' + CC').$$

Die nächstfolgenden Integrale der Form (b) sind vierter Ordnung und gestatten, das Integral des Produktes zweier Kugelflächenfunktionen zweiter Ordnung zu berechnen, und so weiter.

84. Die von dem impulsiven Drucke herrührende Druckkraft. —

Wir denken uns jetzt, daß der Einfallstrom durch die allgemeine Entwicklung 73 (a) gegeben sei, wobei wir das jetzt bedeutungslose konstante Glied φ_γ^0 weglassen:

$$\begin{aligned} \varphi_\gamma &= \dot{\alpha}(x - a) + \dot{\beta}(y - b) + \dot{\gamma}(z - c) \\ &+ \frac{1}{2} \dot{\alpha}_\alpha (x - a)^2 + \frac{1}{2} \dot{\beta}_\beta (y - b)^2 + \frac{1}{2} \dot{\gamma}_\gamma (z - c)^2 \\ (a) \quad &+ \dot{\beta}_\gamma (y - b)(z - c) + \dot{\gamma}_\alpha (z - c)(x - a) + \dot{\alpha}_\beta (x - a)(y - b) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Wenn sich in diesem Einfallstrom eine Kugel unter Volumänderung,

aber unter Erhaltung der Kugelform bewegt, so entsteht in der Flüssigkeit eine Bewegung, deren Potential nach 73 (c)

$$\begin{aligned}
 \varphi = & -\frac{d^2}{r} \dot{d} \\
 & + \dot{\alpha}(x-a) + \dot{\beta}(y-b) + \dot{\gamma}(z-c) - \frac{1}{2} \frac{d^3}{r^3} \left\{ (\dot{d} - \dot{\alpha})(x-a) + (\dot{b} - \dot{\beta})(y-b) + (\dot{c} - \dot{\gamma})(z-c) \right\} \\
 & + \left(1 + \frac{2}{3} \frac{d^5}{r^5} \right) \left\{ \frac{1}{2} \dot{\alpha}_a (x-a)^2 + \frac{1}{2} \dot{\beta}_b (y-b)^2 + \dots + \dot{\alpha}_\beta (x-a)(y-b) + \dot{\alpha}_\gamma (x-a)(z-c) \right\} \\
 & + \dots
 \end{aligned}
 \tag{b}$$

ist. In der ersten Zeile rechts steht das Potential des von den Volumänderungen der Kugel herrührenden Radialstromes. Die zweite Zeile enthält das Potential des Parallelfeldes und der im Parallelfelde bewegten Kugel unveränderlichen Volumens. Die dritte Zeile giebt das Potential der in dem linearen Deformationsele ruhenden Kugel, und die durch Punkte angedeuteten Glieder stellen die Potentiale der in höheren Deformationsele ruhenden Kugel dar.

Um den impulsiven Druck

$$-q \frac{\partial \varphi}{\partial t}
 \tag{c}$$

zu bilden, haben wir nach dem in $d, \dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, \ddot{d}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\alpha}_a, \dots$ vorkommenden t zu differenzieren, nicht aber nach dem in a, b, c vorkommenden. Das Differentiationsresultat wird, als Funktion von $x-a, y-b, z-c$ betrachtet, genau dieselbe Form wie φ haben, mit denselben Relationen unter den Koeffizienten.

Der impulsive Druck wird deshalb genau wie das Potential φ als eine Entwicklung (b) nach räumlichen Kugelfunktionen auftreten, die sich auf der Kugelfläche auf Kugelflächenfunktionen reducieren. Diese Kugelflächenfunktionen werden im ersten Integral 80 (a) mit der Kugelflächenfunktion erster Ordnung $\frac{x'-a}{d}$ multipliziert. Nach dem Fundamentalsatze 82 (A) wird dann nur dasjenige Glied des impulsiven Oberflächendruckes von Bedeutung sein, welches selbst Kugelflächenfunktion erster Ordnung ist. Dieses Glied wird nur aus der zweiten Zeile von (b) entstehen können. Differenzieren wir diese Zeile in der angegebenen Weise nach dem in $d, \dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ enthaltenen t und substituieren nachher $r=d, x=x', y=y', z=z',$ so ergibt sich ein in $x'-a, y'-b, z'-c$ linearer Ausdruck, von dem wir nur das erste Glied

$$\left[\ddot{\alpha} - \frac{1}{2} \frac{d}{d^3} \frac{d}{dt} (d^3 (\dot{\alpha} - \ddot{\alpha})) \right] (x' - a) + \dots$$

aufzuschreiben brauchen. Multiplizieren wir diesen Ausdruck mit $-q$, so erhalten wir den Wert des impulsiven Druckes (c) an der Oberfläche der Kugel. Multiplizieren wir nachher mit der Kugelflächenfunktion

$$- \frac{1}{d} (x' - a)$$

und integrieren über die Kugelfläche, so ergibt sich die x -Komponente der entsprechenden Partialkraft. Die Rechnung ergibt nach der Formel 83(e) unmittelbar, daß die nicht aufgeschriebenen Glieder, die $y' - b$ und $z' - c$ enthalten, bedeutungslos bleiben, und das Resultat wird

$$q E \ddot{\alpha} - q \frac{E}{2} \frac{d}{d^3} \frac{d}{dt} (d^3 (\dot{\alpha} - \ddot{\alpha})).$$

Drücken wir den Kugelradius d durch das Volumen E aus, so ergibt sich einfacher

$$(d) \quad q E \ddot{\alpha} - \frac{1}{2} q \frac{d}{dt} (E (\dot{\alpha} - \ddot{\alpha}))$$

als Ausdruck der x -Komponente der auf dem impulsiven Drucke beruhenden partiellen Druckkraft. Die Komponenten längs den anderen Achsen findet man durch cyklische Vertauschung.

Es ist bemerkenswert, daß von dem äußeren Strome nur das Parallelfeld einen Beitrag zu dieser Kraft liefert. Alle höheren Felder sind belanglos, und alle äußeren Ströme potentieller Natur werden dieselbe Kraft (d) liefern, wenn sie nur dasselbe lineare Entwicklungsglied gemein haben.

85. Ausscheidung wirkungsloser Partialdrucke aus dem relativen Energiedrucke. — Um aus dem relativen Energiedrucke

$$(a) \quad - \frac{1}{2} q \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \dot{a} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \dot{b} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \dot{c} \right)^2 \right\}$$

solche Glieder auszuschneiden, welche keine translatorische Bewegung der Kugel veranlassen können, bemerken wir erst, daß in der Entwicklung 84(b) des Geschwindigkeitspotentials die aufeinanderfolgenden Zeilen abwechselnd gerade und ungerade Funktionen der Variablen $x - a$, $y - b$, $z - c$ darstellen. Unter einer geraden Funktion φ_0 verstehen wir eine solche, welche die Eigenschaft

$$(b_0) \quad \varphi_0(-(x-a), -(y-b), -(z-c)) = \varphi_0(x-a, y-b, z-c)$$

hat, und unter einer ungeraden φ_I eine solche, welche die Eigenschaft

$$(b_I) \quad \varphi_I(-(x-a), -(y-b), -(z-c)) = -\varphi_I(x-a, y-b, z-c)$$

besitzt. Wir teilen deshalb φ in einen geraden und einen ungeraden Teil

$$(c) \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_I,$$

wo also erste, dritte, fünfte Zeile der Entwicklung 84(b) in φ_0 , zweite, vierte, sechste und so weiter in φ_I enthalten sind.

Die Ableitungen nach x , y und z von φ_0 werden ungerade, diejenigen von φ_I gerade. Die in den relativen Energiedruck (a) eingehenden linearen Ausdrücke können wir deshalb in der folgenden Weise in einen ungeraden und einen geraden Teil zerlegen

$$(d) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - a &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi_I}{\partial x} - a \right) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} - b &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + \left(\frac{\partial \varphi_I}{\partial y} - b \right) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} - c &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \left(\frac{\partial \varphi_I}{\partial z} - c \right), \end{aligned}$$

wo überall das erste Glied rechts ungerade, das zweite gerade ist. Beim Quadrieren werden die beiden quadratischen Glieder gerade, und die entsprechenden Partialdrucke werden die Eigenschaft (b₀) besitzen. Diese Eigenschaft, auf den Druck gegen die Oberfläche der Kugel angewendet, sagt aus, daß diametral einander gegenüberliegende Punkte gleichen Druck erleiden. Ein Druck mit dieser Eigenschaft wird höchstens die Kugel komprimieren, aber keine Resultantkraft veranlassen können. Die quadratischen Glieder müssen also fortgelassen werden; wirksam kann nur der ungerade, die doppelten Produkte enthaltende Partialdruck sein, nämlich

$$(e) \quad -q \left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi_I}{\partial x} - a \right) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi_I}{\partial y} - b \right) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi_I}{\partial z} - c \right) \right\}.$$

Der Partialdruck (e) löst sich weiter in Partialdrucke auf, wenn wir φ_0 und φ_I in ihre einzelnen Glieder zerlegen.

Das erste Glied in φ_0 , nämlich das in der ersten Zeile von 84(b) vorkommende Potential der volumändernden Kugel, hat par-

tielle Ableitungen, die proportional zu $\frac{x-a}{r}$, $\frac{y-b}{r}$, $\frac{z-c}{r}$ sind, und das entsprechende Glied von (e) wird proportional zu

$$(f) \quad \left(\frac{\partial \varphi_I}{\partial x} - a \right) \frac{x-a}{r} + \left(\frac{\partial \varphi_I}{\partial y} - b \right) \frac{y-b}{r} + \left(\frac{\partial \varphi_I}{\partial z} - c \right) \frac{z-c}{r}.$$

Nun bemerken wir aber, daß

$$(f') \quad \frac{\partial \varphi_I}{\partial x} \frac{x-a}{r} + \frac{\partial \varphi_I}{\partial y} \frac{y-b}{r} + \frac{\partial \varphi_I}{\partial z} \frac{z-c}{r}$$

die radiale Geschwindigkeitskomponente im Felde φ_I darstellt, und daß

$$(f'') \quad a \frac{x-a}{r} + b \frac{y-b}{r} + c \frac{z-c}{r}$$

die radiale Geschwindigkeitskomponente an der Oberfläche der translatorisch bewegten Kugel unveränderlichen Volumens ist. Nun enthält aber φ_I eben das Potential der im Parallelfelde bewegten unveränderlichen Kugel und sonst nur Potentiale der in Deformationfeldern höherer Ordnung ruhenden Kugel. An der Oberfläche der Kugel, für $r=d$, müssen also die beiden Ausdrücke (f') und (f'') einander gleich sein, und folglich der Ausdruck (f) und der damit proportionale Partialdruck verschwinden. Im Ausdrucke von φ_0 läßt sich also das erste Glied als bedeutungslos ausscheiden.

Wir denken uns also dieses Glied entfernt, so daß φ_0 von jetzt an mit der dritten Zeile von 84(b) anfängt, und führen nun die Differentiation des noch vollkommen allgemeinen φ_I aus. Dabei differenzieren wir wie bei einer früheren Gelegenheit (32), erst nach dem in r implicite enthaltenen x , y , z , und dann nach dem explicite auftretenden x , y , z . Dadurch ergibt sich

$$(g) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_I}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_I}{\partial r} \frac{x-a}{r} + \frac{\delta \varphi_I}{\delta x}, \\ \frac{\partial \varphi_I}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi_I}{\partial r} \frac{y-b}{r} + \frac{\delta \varphi_I}{\delta y}, \\ \frac{\partial \varphi_I}{\partial z} &= \frac{\partial \varphi_I}{\partial r} \frac{z-c}{r} + \frac{\delta \varphi_I}{\delta z}, \end{aligned}$$

welche Werte wir in (e) substituieren.

Nach dieser Substitution läßt sich aus (e) erst ein Glied von der Form

$$(h) \quad -q \frac{\delta \varphi_1}{\delta r} \left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \frac{x-a}{r} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \frac{y-b}{r} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \frac{z-c}{r} \right\}$$

ausscheiden. Die Parenthese stellt hier die Radialgeschwindigkeit im Felde φ_0 dar. Nachdem das Potential der volumändernden Kugel ausgeschieden ist, enthält aber φ_0 nur Potentiale von Strömen, welche tangentiell zur Oberfläche der als ruhend vorgestellten Kugel verlaufen. An der Oberfläche der Kugel haben also diese Ströme die Radialgeschwindigkeit Null, und der mit dieser Radialgeschwindigkeit proportionale Druck (h) muß hier verschwinden und also für die Resultantkraft bedeutungslos sein.

Der andere durch die Substitution (g) hervorgehobene Teil von (e) wird

$$(i) \quad -q \left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \left(\frac{\delta \varphi_1}{\delta x} - a \right) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \left(\frac{\delta \varphi_1}{\delta y} - b \right) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \left(\frac{\delta \varphi_1}{\delta z} - c \right) \right\},$$

welcher Ausdruck jetzt alle wirksamen Glieder des relativen Energiedruckes enthält. Und zwar soll hier φ_0 erst mit der dritten Zeile 84(b) anfangen, während man gleichzeitig bei der Differentiation von φ_1 von dem im Radiusvektor r enthaltenen x, y, z absieht.

86. Die von dem relativen Energiedrucke herrührende Druckkraft. — Das erste Glied in φ_1 ist die zweite Zeile von 84(b). Die Ableitungen dieses Gliedes nach dem explicite vorkommenden x, y, z werden nach Ausführung der Substitution $r = d$

$$(a) \quad \alpha - \frac{1}{2}(a - \alpha), \quad \beta - \frac{1}{2}(b - \beta), \quad \epsilon - \frac{1}{2}(c - \epsilon).$$

Durch Substitution in 85(i) scheidet sich also ein Partialdruck von der Form

$$(b) \quad \frac{3}{2}q \left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} (\alpha - \alpha) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} (\beta - \beta) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} (\epsilon - \epsilon) \right\}$$

aus.

Zur Bildung der x -Komponente der entsprechenden Kraft haben wir mit der Kugelflächenfunktion erster Ordnung

$$(c) \quad -\frac{1}{d}(x' - a)$$

zu multiplicieren und über die Kugelfläche zu integrieren. Aus φ_0 brauchen wir deshalb nur diejenigen Glieder mitzunehmen, welche nach der Differentiation in Bezug auf x, y, z und der nachherigen Substitution $r = d$ Kugelflächenfunktionen erster Ordnung geben.

φ_0 fängt mit der dritten Zeile von 84(b) an. Nach Multiplikation der beiden Parenthesen miteinander enthält diese Zeile zwei räumliche Kugelfunktionen, eine vom Grad 2, nämlich das Potential des Deformationsfeldes, und eine vom Grad -3 , nämlich das entsprechende Reaktionspotential. Nur die erste giebt nach der Differentiation eine räumliche Kugelfunktion ersten Grades und folglich nach der Substitution eine Kugelflächenfunktion erster Ordnung. Die polare Kugelfunktion kommt nicht in Betracht, ebensowenig wie die folgenden höheren Glieder von φ_0 . Differentiieren wir deshalb das Potential des Deformationsfeldes, substituieren $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ und setzen in (b) ein, so ergibt sich

$$(d) \quad \frac{3}{2} q \left\{ \dot{\alpha}_a (a - \dot{a}) + \dot{\alpha}_b (b - \dot{b}) + \dot{\alpha}_c (c - \dot{c}) \right\} (x' - a) + \dots,$$

wo die durch Punkte angedeuteten Glieder $y' - b$ und $z' - c$ enthalten. Nach Multiplikation mit (c) und Integration über die Kugelfläche ergibt sich unmittelbar, wenn wir wieder die Formel 83(e) zur Verwendung bringen

$$(e) \quad - \frac{3}{2} q E \left\{ \dot{\alpha}_a (a - \dot{a}) + \dot{\alpha}_b (b - \dot{b}) + \dot{\alpha}_c (c - \dot{c}) \right\},$$

welches die x -Komponente der auf diesem Partialdrucke beruhenden Druckkraft darstellt. Die entsprechenden y - und z -Komponenten findet man durch cyklische Vertauschung.

Will man die Rechnung fortsetzen, so reduciert sich die Formel 85(i) von jetzt an auf

$$(f) \quad - q \left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \frac{\delta \varphi_1}{\delta x} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \frac{\delta \varphi_1}{\delta y} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \frac{\delta \varphi_1}{\delta z} \right\},$$

wo φ_0 mit der dritten, φ_1 mit der vierten, nicht ausgeschriebenen Zeile von 84(b) anfängt.

Zu der eventuellen Fortsetzung der Rechnung machen wir noch die folgende Bemerkung. Es werden

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$$

immer als Summen von räumlichen Kugelfunktionen positiven oder negativen Grades auftreten, welche sich an der Kugelfläche auf Kugelflächenfunktionen reducieren. Die in

$$\frac{\delta \varphi_1}{\delta x}, \quad \frac{\delta \varphi_1}{\delta y}, \quad \frac{\delta \varphi_1}{\delta z}$$

auftretenden Glieder sind dagegen nicht räumliche Kugelfunktionen; da sie aber die Form einer räumlichen Kugelfunktion multipliziert mit einer Potenz von r haben, werden auch diese Glieder nach der Substitution $r = d$ Kugelflächenfunktionen werden. Nach Multiplikation mit (c) erhalten wir dann unter dem Integralzeichen Produkte von drei Kugelflächenfunktionen. Mit Hilfe der Identität

$$(g) \quad \psi_n(x-a) = \frac{r^2}{2n+1} \left\{ \frac{\partial \psi_n}{\partial x} - \frac{r^{2n+1}}{d^{2n+1}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d^{2n+1}}{r^{2n+1}} \psi_n \right) \right\},$$

wo ψ_n eine beliebige räumliche Kugelfunktion darstellt, kann man aber alle Glieder auf solche Form bringen, daß man an der Kugelfläche Produkte von nur zwei Kugelflächenfunktionen erhält, und somit zur Vereinfachung der Rechnung das Fundamentaltheorem 82(A) zur Verwendung bringen kann.

87. Die Druckkraft gegen die Kugel. — Wir beschränken uns auf die Berücksichtigung der jetzt explicite berechneten Glieder der Druckkraft, nämlich des von dem impulsiven Druck 84(d), und des von dem relativen Energiedruck herrührenden 86(e). Durch Addition dieser Glieder finden wir als Komponente X der gesuchten Kraft:

$$X = qE\ddot{a} - \frac{1}{2}q \frac{d}{dt} \left(E(\dot{a} - \dot{\alpha}) \right) - \frac{3}{2}qE \left\{ \dot{\alpha}_\alpha(\dot{a} - \dot{\alpha}) + \dot{\alpha}_\beta(\dot{b} - \dot{\beta}) + \dot{\alpha}_\gamma(\dot{c} - \dot{\gamma}) \right\}.$$

Die beiden ersten Glieder rechts formen wir noch durch die Identität

$$E\ddot{a} = \frac{d}{dt} (E\dot{a}) - \dot{E}\dot{a}$$

um. Gleichzeitig können wir im letzten Gliede rechts die Komponenten \dot{F} , \dot{G} , \dot{H} des kinematischen Aktionsmomentes der Kugel einführen, nach den allgemeinsten Definitionsgleichungen 68(c') dieser Größen. Wir finden dann als Ausdruck der hydrodynamischen Druckkraft, indem wir gleichzeitig die Komponenten längs der beiden anderen Achsen durch cyklische Vertauschung bilden:

$$\begin{aligned} X &= -q \frac{d}{dt} \left\{ E \left(\frac{1}{2} \dot{a} - \frac{3}{2} \dot{\alpha} \right) \right\} - q \dot{a} \dot{E} - q \left\{ \dot{\alpha}_\alpha \dot{F} + \dot{\alpha}_\beta \dot{G} + \dot{\alpha}_\gamma \dot{H} \right\} \\ (a) \quad Y &= -q \frac{d}{dt} \left\{ E \left(\frac{1}{2} \dot{b} - \frac{3}{2} \dot{\beta} \right) \right\} - q \dot{\beta} \dot{E} - q \left\{ \dot{\beta}_\alpha \dot{F} + \dot{\beta}_\beta \dot{G} + \dot{\beta}_\gamma \dot{H} \right\} \\ Z &= -q \frac{d}{dt} \left\{ E \left(\frac{1}{2} \dot{c} - \frac{3}{2} \dot{\gamma} \right) \right\} - q \dot{\gamma} \dot{E} - q \left\{ \dot{\gamma}_\alpha \dot{F} + \dot{\gamma}_\beta \dot{G} + \dot{\gamma}_\gamma \dot{H} \right\}. \end{aligned}$$

Diese Formeln stellen unser Hauptresultat dar, und wir werden uns von jetzt an nur mit Folgerungen aus diesem Resultate beschäftigen.

88. Prüfung der erreichten Genauigkeit. — Die gefundenen Formeln stellen im allgemeinen nur angenähert den Wert der gesuchten Druckkraft dar, so daß wir ein Kriterium für ihre Verwendbarkeit suchen müssen.

Die nicht berücksichtigten Partialdrucke sind in der Formel 86(f) enthalten, wenn φ_0 mit der dritten, φ_I mit der vierten, durch Punkte dargestellten Zeile der Formel 84(b) anfängt. Diese Partialdrucke werden dann Produkte der deformativen Geschwindigkeiten $\dot{\alpha}_\alpha, \dot{\alpha}_\beta, \dots$ in die deformativen Geschwindigkeiten der nächsthöheren Ordnung enthalten. Drücken wir diese deformativen Geschwindigkeiten als die Ableitungen des Potentials φ_γ des Einfallsstromes aus, so wird der erste nicht berücksichtigte Partialdruck Produkte der zweiten und der dritten Ableitungen von φ_γ zu Koeffizienten haben. Wenn man von Druck zu Kraft übergeht, wird man, wie man sich leicht überzeugt, Integrale von der Form

$$\frac{1}{d} \int (x' - a)^4 d\sigma, \quad \frac{1}{d} \int (x' - a)^2 (y' - b)^2 d\sigma$$

über die Kugelfläche zu berechnen haben. Diese Integrale geben Werte proportional d^5 , so daß wir als Maß der Größenordnung der ersten vernachlässigten Partialkraft Ausdrücke von der Form

$$(a) \quad q d^5 \cdot \left(\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial x^2} \right)_g \left(\frac{\partial^3 \varphi_\gamma}{\partial x^3} \right)_g, \quad q d^5 \cdot \left(\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial y^2} \right)_g \left(\frac{\partial^3 \varphi_\gamma}{\partial y^3} \right)_g, \quad \dots$$

aufstellen können, und verwandte Ausdrücke für die höheren vernachlässigten Partialkräfte.

In einem Fall verschwinden die Produkte (a) identisch, nämlich wenn das Potential φ_γ des Einfallsstromes keine höheren Ableitungen als die zweiten hat, das heißt, wenn sich das Potential der Flüssigkeitsbewegung exakt auf die in 84(a) explicite aufgeschriebenen Glieder reduziert. Also:

*Die Formeln 87(a) stellen den exakten Ausdruck der Druckkraft gegen eine unter Volumänderung bewegte Kugel dar, wenn der Einfallsstrom nur aus einem Parallel- und einem Deformationsstrom zusammen-
gesetzt ist.*

In allen anderen Fällen dagegen geben die Formeln 87(a) die Druckkraft nur angenähert an, und zwar mit um so größerer Genauigkeit, je genauer der Einfallsstrom, innerhalb des von der Kugel

eingenommenen Raumes, als ein zusammengesetzter Parallel- und Deformationsstrom darstellbar ist. Auf dem Vermögen des zusammengesetzten Parallel- und Deformationsstromes, innerhalb eines zweckmäßig begrenzten Bereiches jeden beliebigen Strom angenähert wiedergeben zu können (58, 59), beruht die groſe Brauchbarkeit der Formeln 87 (a).

Wenn Zweifel entsteht, ob die Formeln 87 (a) mit genügender Genauigkeit die Druckkraft darstellen, haben wir die Gröſsenordnung des Ausdruckes (a) und eventuell der verwandten Ausdrücke noch höherer Ordnungen zu untersuchen.

89. Die Bewegungsgleichungen der Kugel. — Wir denken uns im folgenden immer solche Bedingungen gegeben, daſs die Kraft mit genügender Genauigkeit den Einfluſs des Flüssigkeitsdruckes auf die Bewegung der Kugel darstellt. Wir können dann unmittelbar den folgenden Satz aufstellen:

Eine Kugel, welche von einer beliebigen äuſseren Kraft ($\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$) angegriffen wird, und welche sich in einem Flüssigkeitsstrom befindet, wird sich genau so bewegen, wie im leeren Raume unter dem Einflusse von zwei äuſseren Kräften: der gegebenen Kraft ($\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$) und einer zweiten Kraft (X, Y, Z), welche durch die Formeln 87 (a) gegeben ist.

Dieses Satzes werden wir uns im folgenden für die Diskussion der Bewegung unserer Kugel in der Flüssigkeit bedienen. Der Satz läſst sich durch Formeln ausdrücken, indem wir die Bewegungsgleichungen der Kugel unter dem Einfluſs dieser beiden Kräfte aufstellen. Erinnern wir uns, daſs $\ddot{a}, \ddot{b}, \ddot{c}$ die Beschleunigungskomponenten der Kugel sind, und bezeichnen wir durch M die Masse der Kugel, so werden die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} M\ddot{a} &= -q \frac{d}{dt} \left\{ E \left(\frac{1}{2} \dot{a} - \frac{3}{2} \dot{\alpha} \right) \right\} - q \dot{\alpha} \dot{E} - q \left\{ \dot{\alpha}_a \dot{E} + \dot{\alpha}_\beta \dot{G} + \dot{\alpha}_\gamma \dot{H} \right\} + \mathfrak{X} \\ \text{(a) } M\ddot{b} &= -q \frac{d}{dt} \left\{ E \left(\frac{1}{2} \dot{b} - \frac{3}{2} \dot{\beta} \right) \right\} - q \dot{\beta} \dot{E} - q \left\{ \dot{\beta}_a \dot{E} + \dot{\beta}_\beta \dot{G} + \dot{\beta}_\gamma \dot{H} \right\} + \mathfrak{Y} \\ M\ddot{c} &= -q \frac{d}{dt} \left\{ E \left(\frac{1}{2} \dot{c} - \frac{3}{2} \dot{\gamma} \right) \right\} - q \dot{\gamma} \dot{E} - q \left\{ \dot{\gamma}_a \dot{E} + \dot{\gamma}_\beta \dot{G} + \dot{\gamma}_\gamma \dot{H} \right\} + \mathfrak{Z}. \end{aligned}$$

Nach diesen Gleichungen läſst sich also die Bewegung der Kugel in der Flüssigkeit diskutieren, ohne daſs wir auf Betrachtungen hydrodynamischer Natur zurückzugreifen brauchen.

Zweiter Abschnitt.

Induktionskraft und Energiekraft.

90. Teilung der Druckkraft. — Die hydrodynamische Druckkraft **87(a)** läßt sich in zwei Partialkräfte zerlegen, welche so verschiedene Eigenschaften haben, daß es sich empfiehlt, ihren Einfluß auf die Bewegung der Kugel getrennt zu studieren. Wir schreiben

$$\begin{aligned} X &= X_i + X_e \\ (a) \quad Y &= Y_i + Y_e \\ Z &= Z_i + Z_e, \end{aligned}$$

wo die Komponenten X_i, Y_i, Z_i der ersten Partialkraft die Form totaler Ableitungen nach der Zeit haben,

$$\begin{aligned} X_i &= -q \frac{d}{dt} \left\{ E \left(\frac{1}{2} \dot{a} - \frac{3}{2} \dot{a} \right) \right\} \\ (b) \quad Y_i &= -q \frac{d}{dt} \left\{ E \left(\frac{1}{2} \dot{b} - \frac{3}{2} \dot{\beta} \right) \right\} \\ Z_i &= -q \frac{d}{dt} \left\{ E \left(\frac{1}{2} \dot{c} - \frac{3}{2} \dot{\gamma} \right) \right\}, \end{aligned}$$

während die Komponenten der zweiten Partialkraft als Aggregate von Geschwindigkeitsprodukten auftreten:

$$\begin{aligned} X_e &= -q \dot{a} \dot{E} - q \{ \dot{\alpha}_a \dot{F} + \dot{\alpha}_\beta \dot{G} + \dot{\alpha}_\gamma \dot{H} \} \\ (c) \quad Y_e &= -q \dot{\beta} \dot{E} - q \{ \dot{\beta}_a \dot{F} + \dot{\beta}_\beta \dot{G} + \dot{\beta}_\gamma \dot{H} \} \\ Z_e &= -q \dot{\gamma} \dot{E} - q \{ \dot{\gamma}_a \dot{F} + \dot{\gamma}_\beta \dot{G} + \dot{\gamma}_\gamma \dot{H} \}. \end{aligned}$$

Die erste dieser Kräfte wird als totale Zeitableitung einer in der Zeit veränderlichen GröÙe in einer eigentümlichen, fluktuierenden Weise auftreten, und wird, mit Rücksicht auf NEWTON's Bezeichnung für solche Ableitungen, die Fluxionskraft genannt werden können. Eine Kraft, welche in ähnlicher fluktuierender Weise wirkt, und auch mathematisch als eine totale Zeitableitung auftritt, ist die elektrodynamische Induktionskraft. Nach Analogie können wir des-

halb auch die Kraft (b) als die hydrodynamische Induktionskraft bezeichnen.

Die zweite Partialkraft (c) braucht nicht diese eigentümliche fluktuierende Natur zu haben, sondern kann den gewöhnlichen Kräften der Mechanik vollständig analog auftreten. Wie in den Ausdrücken für kinetische Energie treten in jedem Glied der Ausdrücke (c) Produkte von Geschwindigkeiten auf, und es wird sich auch später zeigen, daß sich die Komponenten dieser Kraft als Ableitungen eines Energieausdruckes längs der Koordinaten darstellen lassen. Mit Rücksicht hierauf werden wir diese zweite Partialkraft die hydrodynamische Energiekraft nennen.

91. Erste Integration der Bewegungsgleichungen der Kugel. —

Der Umstand, daß die Fluxions- oder Induktionskraft als eine totale Zeitableitung auftritt, macht es möglich, durch eine Integration unmittelbar zu dem Studium derjenigen Geschwindigkeit überzugehen, welche von der Induktionskraft erzeugt wird. Diese Geschwindigkeit wird mit der totalen Geschwindigkeit der Kugel identisch sein in solchen Fällen, wo die Induktionskraft die einzige wirksame Kraft ist, und sonst im allgemeinen eine besonders wichtige Partialgeschwindigkeit der Kugel darstellen.

Wir schreiben die Bewegungsgleichungen 89(a) der Kugel auf, indem wir auf der rechten Seite den Ausdruck der Induktionskraft explicite beibehalten, während wir diejenige Kraft, welche nicht Induktionskraft ist, durch $(\mathfrak{X}_e, \mathfrak{Y}_e, \mathfrak{Z}_e)$ bezeichnen. Diese Kraft werden wir die totale Energiekraft nennen; sie wird im allgemeinsten Falle die Summe der hydrodynamischen Energiekraft (X_e, Y_e, Z_e) und der fremden, nicht hydrodynamischen Kraft $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ sein.

Die Bewegungsgleichungen erhalten dann die Form:

$$\begin{aligned} M\ddot{a} &= -q \frac{d}{dt} \left\{ E \left(\frac{1}{2} \dot{a} - \frac{3}{2} \dot{\alpha} \right) \right\} + \mathfrak{X}_e \\ (a) \quad M\ddot{b} &= -q \frac{d}{dt} \left\{ E \left(\frac{1}{2} \dot{b} - \frac{3}{2} \dot{\beta} \right) \right\} + \mathfrak{Y}_e \\ M\ddot{c} &= -q \frac{d}{dt} \left\{ E \left(\frac{1}{2} \dot{c} - \frac{3}{2} \dot{\gamma} \right) \right\} + \mathfrak{Z}_e. \end{aligned}$$

Nehmen wir an, daß zur Zeit $t = 0$ Kugel und Flüssigkeit in Ruhe waren, und integrieren wir die Gleichungen von $t = 0$ bis $t = t$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 M \dot{a} &= -q E \left(\frac{1}{2} \dot{a} - \frac{3}{2} \dot{\alpha} \right) + \int_0^t \mathfrak{X}_e dt \\
 \text{(b)} \quad M \dot{b} &= -q E \left(\frac{1}{2} \dot{b} - \frac{3}{2} \dot{\beta} \right) + \int_0^t \mathfrak{Y}_e dt \\
 M \dot{c} &= -q E \left(\frac{1}{2} \dot{c} - \frac{3}{2} \dot{\gamma} \right) + \int_0^t \mathfrak{Z}_e dt.
 \end{aligned}$$

Auf der linken Seite dieser Gleichungen stehen die Komponenten der BewegungsgröÙe der Kugel; auf der rechten Seite stehen die Komponenten der Kraftimpulse, welche die Kugel seit dem Anfang der Bewegung erhalten hat. Dabei tritt der Kraftimpuls als die Summe von zwei partiellen Impulsen auf, deren einer von der Induktionskraft (X_i, Y_i, Z_i), der andere von der Energiekraft ($\mathfrak{X}_e, \mathfrak{Y}_e, \mathfrak{Z}_e$) herrührt und es ist besonders hervorzuheben, daß, während der Impuls der Energiekraft durch nicht ausgerechnete Integrale ausgedrückt ist, der Impuls der Induktionskraft mit explicite berechneten Werten der Komponenten auftritt.

Wir dividieren diese Gleichungen durch die Masse M der Kugel und schreiben gleichzeitig im ersten Glied rechts

$$\text{(c)} \quad M = QE,$$

wo Q die Dichte, und E wie gewöhnlich das Volumen der Kugel darstellt. Es ergeben sich dann die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 \dot{a} &= -\frac{q}{Q} \left(\frac{1}{2} \dot{a} - \frac{3}{2} \dot{\alpha} \right) + \frac{1}{M} \int_0^t \mathfrak{X}_e dt \\
 \text{(d)} \quad \dot{b} &= -\frac{q}{Q} \left(\frac{1}{2} \dot{b} - \frac{3}{2} \dot{\beta} \right) + \frac{1}{M} \int_0^t \mathfrak{Y}_e dt \\
 \dot{c} &= -\frac{q}{Q} \left(\frac{1}{2} \dot{c} - \frac{3}{2} \dot{\gamma} \right) + \frac{1}{M} \int_0^t \mathfrak{Z}_e dt,
 \end{aligned}$$

welche sofort zu der Definition zweier Partialgeschwindigkeiten der Kugel führen.

92. Inducierte und energetische Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Kugel. — Wir nennen die zwei Partialgeschwindigkeiten,

zu deren Betrachtung uns diese Entwicklung führt, die inducierte Geschwindigkeit, welche die Komponenten

$$\begin{aligned} \dot{a}_i &= -\frac{q}{Q} \left(\frac{1}{2} \dot{a} - \frac{3}{2} \dot{\alpha} \right) \\ \dot{b}_i &= -\frac{q}{Q} \left(\frac{1}{2} \dot{b} - \frac{3}{2} \dot{\beta} \right) \\ \dot{c}_i &= -\frac{q}{Q} \left(\frac{1}{2} \dot{c} - \frac{3}{2} \dot{\gamma} \right), \end{aligned} \quad (\text{a})$$

und die energetische Geschwindigkeit, welche die Komponenten

$$\begin{aligned} \dot{a}_e &= \frac{1}{M} \int_0^t \mathfrak{X}_e dt \\ \dot{b}_e &= \frac{1}{M} \int_0^t \mathfrak{Y}_e dt \\ \dot{c}_e &= \frac{1}{M} \int_0^t \mathfrak{Z}_e dt \end{aligned} \quad (\text{b})$$

hat.

Die in diesen Formeln enthaltenen Definitionen sind zunächst dynamischer Natur:

(A) *Die inducierte Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Kugel ist die durch den Impuls der Induktionskraft (X_i, Y_i, Z_i) erzeugte Partialgeschwindigkeit dieses Punktes.*

(B) *Die energetische Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Kugel ist die durch den Impuls der totalen Energiekraft ($\mathfrak{X}_e, \mathfrak{Y}_e, \mathfrak{Z}_e$) erzeugte Partialgeschwindigkeit dieses Punktes.*

Die Summe dieser Partialgeschwindigkeiten stellt die aktuelle Geschwindigkeit $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}$ der Kugel dar:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \dot{a}_i + \dot{a}_e \\ \dot{b} &= \dot{b}_i + \dot{b}_e \\ \dot{c} &= \dot{c}_i + \dot{c}_e. \end{aligned} \quad (\text{c})$$

Im allgemeinen wird eine solche Zerlegung einer Geschwindigkeit in Partialgeschwindigkeiten verschiedenen dynamischen Ur-

sprunges erst dann eindeutig bestimmt sein, wenn wir die Kräfte als Funktionen der Zeit kennen. Im vorliegenden Falle ist aber, wegen der eigentümlichen Form der einen Partialkraft, die Zerlegung eine eindeutige schon ohne jede Kenntnis der dynamischen Geschichte des Systems. Denn wie die Gleichungen (a) zeigen, ist die inducierte Geschwindigkeit schon durch die zur betrachteten Zeit vorliegenden Geschwindigkeiten in Verbindung mit den Dichtigkeiten der Kugel und der Flüssigkeit eindeutig gegeben. Die andere Partialgeschwindigkeit, die energetische, ist folglich auch durch dieselben Daten eindeutig bestimmt. In diesem Umstande der eindeutigen Bestimmtheit der entsprechenden Partialgeschwindigkeiten liegt zunächst die Berechtigung der Zerlegung der Kraft nach dem von uns benutzten Princip.

Es könnte beispielsweise von Anfang an natürlicher erscheinen, in den Bewegungsgleichungen die gesamte hydrodynamische Kraft als die eine, und die fremde, nicht hydrodynamische Kraft als die andere Partialkraft zu betrachten. Wir würden aber dann nicht mehr eine entsprechende eindeutige Zerlegung der Geschwindigkeiten in die von der hydrodynamischen und die von der nicht-hydrodynamischen Kraft herrührende Partialgeschwindigkeit erreichen. Je nachdem die vorausgehende Geschichte des Systems die eine oder die andere gewesen wäre, würden wir verschiedene Werte der Partialgeschwindigkeiten erhalten haben.

Wir sind deshalb wohl berechtigt anzunehmen, daß wir durch die von uns vorgenommene Teilung den zweckmäßigsten oder vielleicht sogar den einzig möglichen Weg eingeschlagen haben, welcher zu einem vollständigen Verständnis des vorliegenden Mechanismus führen kann, und dies beruht vor allem auf der eindeutigen Natur der Zerlegung (c):

(C) *Die inducierte und die energetische Partialgeschwindigkeit des Mittelpunktes der Kugel sind durch die augenblicklich vorliegenden Geschwindigkeiten in Verbindung mit den Dichtigkeiten der Kugel und der Flüssigkeit eindeutig bestimmt.*

Die Gleichungen (a) und (c) enthalten die Beziehungen zwischen den jetzt teils kinematisch, teils dynamisch definierten Geschwindigkeiten. Eliminiert man aus diesen Gleichungen die inducierte Geschwindigkeit ($\dot{a}_i, \dot{b}_i, \dot{c}_i$), so erhält man den Ausdruck der aktuellen Geschwindigkeit ($\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}$) der Kugel durch die energetische Geschwindigkeit ($\dot{a}_e, \dot{b}_e, \dot{c}_e$) und die Geschwindigkeit ($\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$) des Einfallsstromes, nämlich:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{Q}{Q + \frac{1}{2}q} \dot{a}_e + \frac{\frac{3}{2}q}{Q + \frac{1}{2}q} \dot{a} \\
 b &= \frac{Q}{Q + \frac{1}{2}q} \dot{b}_e + \frac{\frac{3}{2}q}{Q + \frac{1}{2}q} \dot{\beta} \\
 c &= \frac{Q}{Q + \frac{1}{2}q} \dot{c}_e + \frac{\frac{3}{2}q}{Q + \frac{1}{2}q} \dot{\gamma},
 \end{aligned}
 \tag{d}$$

welches besonders wichtige Relationen sind.

93. Induciertes und energetisches Feld. — Die eigentümliche Behandlungsweise unserer Aufgabe, zu welcher wir durch die oben entwickelte Eindeutigkeitseigenschaft geführt wurden, läßt sich auch durch die folgenden Worte charakterisieren: Die hydrodynamische Energiekraft wird als eine mehr unwesentliche, dem System fremde Kraft betrachtet, und zu der möglicherweise auch wirksamen fremden Kraft hinzugerechnet. Die Induktionskraft dagegen tritt als die wesentliche, bei der dynamischen Wechselwirkung der Kugel und der Flüssigkeit in erster Linie thätige Kraft auf.

Diese Bemerkung ist wichtig, wenn wir die Kräfte in ihrem Zusammenhang mit den Feldern betrachten wollen. Denn die Bewegungsgleichungen 91 (a) beziehen sich direkt nur auf die Bewegung des Mittelpunktes der Kugel, und dadurch ist noch nicht eindeutig bestimmt, wie wir die inducierten und die energetischen Felder aufzufassen haben. Im Anschluß an die schon hervorgetretene Auffassung der Energiekraft als einer äußeren, fremden Kraft wird man unmittelbar zu der folgenden Fassung der Definition geführt:

(A) *Das energetische Geschwindigkeitsfeld ist das Feld der translatorischen Geschwindigkeit ($\dot{a}_e, \dot{b}_e, \dot{c}_e$) innerhalb der Kugel, welches durch die totale energetische Kraft ($\mathfrak{X}_e, \mathfrak{Y}_e, \mathfrak{Z}_e$) erzeugt wird.*

Dieses Feld beruht also auf dem Eingreifen fremdartiger Ursachen, so daß es sich empfiehlt, bei dem Studium unseres Mechanismus uns dieses Feld als entfernt vorzustellen, und das gesamte dann zurückbleibende inducierte Feld zu betrachten. Dieses inducierte Feld läßt sich deshalb nicht einfach als das durch die Induktionskraft (X_i, Y_i, Z_i) erzeugte Feld definieren, sondern es ist ein Feld viel größerer Allgemeinheit, worin das durch die Induktionskraft direkt erzeugte Feld als Partialfeld eingeht. Die einfachste Definition wird deshalb die negative:

(B) *Das inducierte Feld ist dasjenige Feld, welches zurückbleibt, nachdem man das energetische Feld entfernt hat.*

Während das energetische Feld nur innerhalb der Kugel besteht, wird das inducierte ein zusammenhängendes äußeres und inneres Feld sein. Im äußeren Raum wird dann das inducierte Feld mit dem totalen, thatsächlich vorliegenden Stromfeld identisch sein. Im inneren Raume ist es dagegen ein Partialfeld, welches nach der Entfernung der energetischen Bewegung zurückbleibt. Bewegt sich die Kugel ohne Volumänderung, so identificiert sich das innere inducierte Feld mit dem einfachen Translationsfeld $(\dot{a}_i, \dot{b}_i, \dot{c}_i)$, dessen Geschwindigkeit der inducierten Geschwindigkeit im Mittelpunkte der Kugel gleich ist, welche durch den Impuls der Induktionskraft (X_i, Y_i, Z_i) erzeugt ist. Hat dagegen die Kugel veränderliches Volumen, so bleibt, nach der Entfernung der energetischen Geschwindigkeit, außer der Geschwindigkeit $(\dot{a}_i, \dot{b}_i, \dot{c}_i)$ auch noch eine radial gerichtete, durch die Kraft (X_i, Y_i, Z_i) nicht erzeugte Geschwindigkeit zurück, welche trotzdem zu dem inducierten Feld zu rechnen ist.

Was wir die Induktionskraft genannt haben, muß deshalb nicht als Repräsentant des ganzen Induktionsvorganges betrachtet werden, sondern nur als Repräsentant eines gewissen Teiles desselben. In der That muß die Induktionskraft 90 (b) in Verbindung mit der Druckkraft in der Flüssigkeit betrachtet werden. Diese Druckkräfte haben wir nie explicite betrachtet, aber implicite lag ihre Fundamenteigenschaft, eine nicht wirbelnde Bewegung zu erzeugen (15, Seite 22) allen unseren früheren kinematischen Betrachtungen zu Grunde. Die jetzt zu studierende Induktionskraft ergänzt diese Kräfte, wenn wir nicht nur die Bewegung der Flüssigkeit für sich, sondern Kugel und Flüssigkeit zusammen als ein einziges bewegtes materielles Kontinuum betrachten.

94. Einführung der hydrodynamischen Feldintensität. — Bei dem Studium des vollständigen inducierten Feldes wird es sich vorteilhaft zeigen, die Geschwindigkeit durch eine andere Vektorgröße, nämlich die hydrodynamische Feldintensität zu ersetzen, auf deren Brauchbarkeit für die Beschreibung der Bewegung materieller Kontinua wir schon früher (13) hingedeutet haben.

Diese Feldintensität ist das Produkt der Geschwindigkeit in die Dichte der bewegten Materie, oder auch die auf die Einheit des Volumens bezogene Bewegungsgröße der bewegten Materie. Nach den Elementen der Mechanik ist eine Bewegungsgröße immer einem bestimmten Kraftimpuls gleichwertig. Wenn ich also die geometrische Verteilung der Feldintensität in einem bewegten materiellen Kontinuum kenne, so weiß ich auch, welchen Kraftimpuls jedes Volum-

element des Kontinuums seit dem Anfange der Bewegung erhalten hat. Da die vorgenommene Zerlegung der uns vorliegenden Bewegungsfelder eben auf der Betrachtung der von Induktionskraft und Energiekraft getrennt herrührenden Impulsen beruht, ist es schon von Anfang an zu erwarten, daß nach der Zerlegung die Anwendung der Feldintensität anstatt der Geschwindigkeit Vorteile darbieten wird.

Im Ausdrücke des Geschwindigkeitspotentials der Flüssigkeit treten die vier Geschwindigkeitskomponenten \dot{a} , \dot{b} , \dot{c} , \dot{d} der Kugel auf. Durch Multiplikation mit der Dichte q der Flüssigkeit erhalten wir die entsprechenden Feldintensitäten; diese werden als Parameter in die Feldintensitätspotentiale eingehen, und wir werden sie durch \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} , \bar{d} bezeichnen. Gleichzeitig kommen im Ausdrücke des Geschwindigkeitspotentials der Flüssigkeit die Geschwindigkeitskomponenten $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ vor; die entsprechenden Feldintensitäten werden wir durch $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ bezeichnen, und das dem Geschwindigkeitspotential φ entsprechende Feldintensitätspotential schreiben wir $\bar{\varphi}$.

Im Innern der Kugel ist es nur das inducirte Partialfeld, dessen Darstellung durch Feldintensitäten Interesse hat. Natürlich kann man auch das energetische Feld durch Feldintensitäten ausdrücken; da es aber schon an sich absolut einfach ist, und nur getrennt nicht unmittelbar in Verbindung mit den anderen Feldern betrachtet werden wird, hat dieser Übergang zu einer anderen Darstellung weniger Interesse. Das Feld, welches nach Entfernung des energetischen Feldes im Innern der Kugel zurückbleibt, läßt sich durch die drei Geschwindigkeitskomponenten \dot{a}_i , \dot{b}_i , \dot{c}_i und die Radialgeschwindigkeit \dot{d} ausdrücken. Der Dichtigkeitsfaktor ist jetzt Q , und wir werden die entsprechenden vier Feldintensitäten durch \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} bezeichnen. Das entsprechende Potential der Feldintensität im Innern der Kugel, welches aus dem Potential Φ_i des inducierten Geschwindigkeitsfeldes entsteht, werden wir durch $\bar{\Phi}$ bezeichnen.

Für den Übergang von Geschwindigkeiten zu Feldintensitäten erhalten wir also das folgende Schema:

$$\begin{array}{lll}
 \bar{a} = q \dot{a} & \bar{\alpha} = q \dot{\alpha} & \bar{A} = Q \dot{a}_i \\
 \bar{b} = q \dot{b} & \bar{\beta} = q \dot{\beta} & \bar{B} = Q \dot{b}_i \\
 \text{(a)} \quad \bar{c} = q \dot{c} & \bar{\gamma} = q \dot{\gamma} & \bar{C} = Q \dot{c}_i \\
 \bar{d} = q \dot{d} & & \bar{D} = Q \dot{d} \\
 & \bar{\varphi} = q \varphi & \bar{\Phi} = Q \Phi_i.
 \end{array}$$

Wenn wir mit Hilfe dieser Ausdrücke die Geschwindigkeiten der Formeln 92 (a) durch die entsprechenden Feldintensitäten ersetzen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \bar{A} &= -\frac{1}{2}\bar{a} + \frac{3}{2}\bar{\alpha} \\ (b) \quad \bar{B} &= -\frac{1}{2}\bar{b} + \frac{3}{2}\bar{\beta} \\ \bar{C} &= -\frac{1}{2}\bar{c} + \frac{3}{2}\bar{\gamma}. \end{aligned}$$

Wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich ist, meinen wir, wenn wir von der Feldintensität schlechthin reden, nur die Feldintensität in der inducierten Partialbewegung. Dieses muß zur Vermeidung naheliegender Missverständnisse stark hervorgehoben werden. Die Feldintensität der totalen vorliegenden Bewegung würden wir eventuell als die totale Feldintensität, diejenige der energetischen Partialbewegung als die energetische Feldintensität bezeichnen. Die Betrachtung derselben bietet aber kein besonderes Interesse dar.

Da der Übergang von Geschwindigkeit zu Feldintensität für das folgende äußerst wichtig ist, fassen wir noch das Vorhergehende in die folgende Regel zusammen:

(A) *Man geht von der Geschwindigkeit zu der Feldintensität in der Weise über, daß man erst die energetische Partialgeschwindigkeit entfernt, und die übrigbleibende, inducierte Geschwindigkeit mit der Dichte des bewegten Stoffes multipliziert.*

Diese Regel ist allgemein gültig: in der Flüssigkeit, wo überhaupt keine energetische Geschwindigkeit vorkommt, reduciert sich alles auf die Multiplikation mit der Dichtigkeit q . Im Innern der Kugel gilt dasselbe, solange keine Energiekraft thätig gewesen ist, nur daß der Dichtigkeitsfaktor hier Q ist. Wirkt aber eine Energiekraft, so muß erst die energetische Geschwindigkeit entfernt werden.

Im Anschluß an diese Regel, welche unsere Definition der Feldintensität enthält, können wir den folgenden Satz aufstellen, welcher die dynamische Bedeutung dieser GröÙe erläutert:

(B) *Die Feldintensität in einem beliebigen Punkte ist gleich demjenigen Kraftimpuls, welchen das dort befindliche Volumelement des bewegten materiellen Kontinuums seit dem Anfange der Bewegung erhalten hat, wobei der von der Energiekraft herrührende Impuls nicht mitgerechnet werden darf.*

Das Entfernen des energetischen Impulses kommt wieder nur in Frage, wenn man die Verhältnisse im Innern der Kugel betrachtet, und dabei auch nur, wenn die Kugel thatsächlich von einer

Energiekraft hydrodynamischen oder nicht hydrodynamischen Ursprunges angegriffen wird.

95. Selbstinduktion und Fremdinduktion. — Die hydrodynamische Induktionskraft tritt als eine Summe von zwei Partialkräften verschiedenen Ursprunges auf:

$$\begin{aligned} X_i &= X_{si} + X_{fi} \\ (a) \quad Y_i &= Y_{si} + Y_{fi} \\ Z_i &= Z_{si} + Z_{fi}. \end{aligned}$$

Die erste dieser Partialkräfte

$$\begin{aligned} X_{si} &= -\frac{1}{2} q \frac{d}{dt} (E \dot{a}) \\ (b) \quad Y_{si} &= -\frac{1}{2} q \frac{d}{dt} (E \dot{b}) \\ Z_{si} &= -\frac{1}{2} q \frac{d}{dt} (E \dot{c}) \end{aligned}$$

hängt nur von der Bewegung der Kugel in Verbindung mit dem bloßen Vorhandensein der Flüssigkeit ab, und kann dementsprechend als die selbstinducierende Kraft bezeichnet werden.

Die zweite

$$\begin{aligned} X_{fi} &= \frac{3}{2} q \frac{d}{dt} (E \dot{\alpha}) \\ (c) \quad Y_{fi} &= \frac{3}{2} q \frac{d}{dt} (E \dot{\beta}) \\ Z_{fi} &= \frac{3}{2} q \frac{d}{dt} (E \dot{\gamma}) \end{aligned}$$

ist dagegen von der Bewegung der Flüssigkeit abhängig. Sie beruht auf einer für die Kugel fremden Bewegung, und kann als die fremdinducierende Kraft bezeichnet werden.

Die selbstinducierende Kraft läßt sich von jeder anderen Kraft hydrodynamischen Ursprunges getrennt studieren. Denn setzen wir voraus, daß zu jeder Zeit

$$(d) \quad \dot{\alpha} = \dot{\beta} = \dot{\gamma} = 0,$$

so verschwindet die fremdinducierende Kraft identisch. Die Bedingungen (d) sagen aus, daß kein Einfallstrom vorhanden ist. Denn sind die linearen Geschwindigkeiten dauernd Null, so können auch

nicht deformative Geschwindigkeiten $\dot{\alpha}_\alpha, \dot{\alpha}_\beta, \dot{\alpha}_\gamma, \dot{\beta}_\gamma, \dots$ bestehen. Es wird dann nicht nur die fremdinducierende Kraft verschwinden, sondern auch die gesamte Energiekraft 90(c). Der Erscheinung der reinen Selbstinduktion begegnen wir also, wenn sich eine Kugel in ursprünglich ruhender Flüssigkeit bewegt, und die selbstinducierende Kraft wird dann die einzige Kraft hydrodynamischen Ursprunges sein, welche überhaupt in Frage kommt.

Die fremdinducierende Kraft läßt sich dagegen nicht isolieren. Denn die Wirkung derselben wird notwendig die Bildung einer Geschwindigkeit ($\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}$) der Kugel sein, und mit dem Auftreten dieser Geschwindigkeit, oder schon mit dem Auftreten der zur Bildung dieser Geschwindigkeit notwendigen Beschleunigung tritt auch sofort die selbstinducierende Kraft in Wirksamkeit. Eine reine Fremdinduktionserscheinung besteht also nicht in demselben Sinne, als die reine Selbstinduktionserscheinung. Indem wir den Gesichtspunkt etwas verändern, werden wir aber sagen, daß die Erscheinung der reinen Fremdinduktion vorliegt, wenn die fremdinducierende Kraft die einzige primäre Ursache der Bewegung der Kugel ist. Denn während die selbstinducierende Kraft niemals primär bewegungserzeugend wirken, sondern nur die auf anderen Ursachen beruhende Bewegung modificieren kann, hat die fremdinducierende Kraft, wie jede fremde Kraft, das Vermögen, eine Bewegung von Anfang an einleiten zu können.

Wenn deshalb die inducierende Kraft als einzige Ursache der Bewegung der Kugel auftritt, werden wir sagen, daß die Erscheinung der reinen Fremdinduktion vorliegt. Die Bedingung für das Auftreten derselben wird dann, daß die Kugel keine auf die Wirkung einer Energiekraft zurückführbare Geschwindigkeit besitzt, also

$$(e) \quad \dot{a}_e = \dot{b}_e = \dot{c}_e = 0.$$

Dieses Verschwinden der energetischen Geschwindigkeit möge sonst darauf beruhen, daß keine Energiekraft, weder hydrodynamischen noch fremden Ursprunges, besteht, oder darauf, daß die fremde Energiekraft der hydrodynamischen Energiekraft genau gleich und entgegengesetzt ist.

Es empfiehlt sich, die somit definierten Erscheinungen der reinen Selbstinduktion und der reinen Fremdinduktion getrennt zu studieren, ehe wir zu dem allgemeinsten Falle der hydrodynamischen Induktion und zu dem Zusammenwirken von Induktionskraft und Energiekraft übergehen.

Dritter Abschnitt.

Die reine Selbstinduktion.

96. Bewegung einer Kugel in ursprünglich ruhender Flüssigkeit. — Die Bedingungen für das Zustandekommen der reinen Selbstinduktionerscheinung sind also durch die Gleichungen 95 (d) gegeben, wonach der Einfallstrom verschwindet, so daß sich die Kugel in ursprünglich ruhender Flüssigkeit bewegt. Die Bewegungen der Kugel und der Flüssigkeit werden dann in kinematischer Beziehung durch die Potentiale 35 (a) und (b) gegeben sein, nämlich

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{2} \frac{r^2}{d} \dot{d} + \dot{a}(x-a) + \dot{b}(y-b) + \dot{c}(z-c) \\ (a) \quad \varphi &= -\frac{d^2}{r} \dot{d} - \frac{1}{2} \frac{d^3}{r^3} \left\{ \dot{a}(x-a) + \dot{b}(y-b) + \dot{c}(z-c) \right\}. \end{aligned}$$

Das entsprechende Geschwindigkeitsfeld wird in Specialfällen durch die Figuren 1 oder 7, im allgemeinsten Falle durch ein Kurvensystem wie dasjenige der Figur 8 gegeben sein.

In diesem Falle ist also die selbstinducierende Kraft

$$\begin{aligned} X_i &= -\frac{1}{2} q \frac{d}{dt} (E \dot{a}) \\ (b) \quad Y_i &= -\frac{1}{2} q \frac{d}{dt} (E \dot{b}) \\ Z_i &= -\frac{1}{2} q \frac{d}{dt} (E \dot{c}) \end{aligned}$$

die einzig auftretende Kraft hydrodynamischen Ursprunges. Durch Ausführung der Differentiation nach der Zeit nehmen die Ausdrücke dieser Kraftkomponenten die Form

$$\begin{aligned} X_i &= -\frac{1}{2} q E \ddot{a} - \frac{1}{2} q \dot{E} \dot{a} \\ (b') \quad Y_i &= -\frac{1}{2} q E \ddot{b} - \frac{1}{2} q \dot{E} \dot{b} \\ Z_i &= -\frac{1}{2} q E \ddot{c} - \frac{1}{2} q \dot{E} \dot{c} \end{aligned}$$

an. Hat endlich die Kugel konstantes Volumen, so verschwindet das letzte Glied rechts, und wir erhalten einfacher:

$$\begin{aligned}
 (b'') \quad X_i &= -\frac{1}{2} q E \ddot{a} \\
 Y_i &= -\frac{1}{2} q E \ddot{b} \\
 Z_i &= -\frac{1}{2} q E \ddot{c}.
 \end{aligned}$$

Wie schon oben hervorgehoben, kann diese Kraft nicht primär bewegungserzeugend wirken, ebensowenig wie die träge Reaktion eines Körpers gegen Bewegungsänderungen bewegungserzeugend wirken kann. Mit der auf der Trägheit beruhenden Reaktion ist nämlich diese Kraft sehr nahe verwandt, wie man aus dem Specialfall (b'') sieht. Denn in diesem Falle ist die Kraft, genau wie die wegen der Trägheit eintretende Reaktion, der augenblicklich vorliegenden Beschleunigung \ddot{a} , \ddot{b} , \ddot{c} entgegengesetzt gerichtet, und der Unterschied reducirt sich darauf, daß als Proportionalitätsfaktor nicht die Masse M der Kugel selbst, sondern die Hälfte der von der Kugel verdrängten Flüssigkeitsmasse

$$(c) \quad m = q E$$

auftritt.

Im allgemeinen Falle (b') verändern sich die Verhältnisse insofern, als dieser Proportionalitätsfaktor nicht mehr eine konstante, sondern eine veränderliche GröÙe ist, während gleichzeitig eine ergänzende, von den Geschwindigkeitsprodukten $\dot{E}a$, $\dot{E}b$, $\dot{E}c$ abhängige Partialkraft hinzutritt. Aber auch diese letzte Partialkraft kann nur in eine schon vorhandene Bewegung der Kugel modificierend eingreifen, und nicht selbst primär bewegungserzeugend wirken, weil sie eben das Vorhandensein einer Geschwindigkeit der Kugel voraussetzt.

Als primäre Bewegungsursache und erste Bedingung für das Eintreten der reinen Selbstinduktionserscheinung muß deshalb notwendig eine fremde Energiekraft entweder wirken oder gewirkt haben, so daß eine energetische Geschwindigkeit vorhanden ist.

Den Ausdruck der von der selbstinducierenden Kraft erzeugten, inducierten Geschwindigkeit finden wir aus 92(a), wenn wir \dot{a} , \dot{b} und \dot{c} gleich Null setzen, also

$$\begin{aligned}
 (d) \quad \dot{a}_i &= -\frac{1}{2} \frac{q}{Q} \dot{a} \\
 \dot{b}_i &= -\frac{1}{2} \frac{q}{Q} \dot{b} \\
 \dot{c}_i &= -\frac{1}{2} \frac{q}{Q} \dot{c}.
 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen stellen also Relationen zwischen der inducierten und der aktuellen Geschwindigkeit der Kugel dar. Gleichzeitig gehen die Gleichungen 92 (d) in die folgenden

$$\begin{aligned} a &= \frac{Q}{Q + \frac{1}{2}q} \dot{a}_e \\ (e) \quad b &= \frac{Q}{Q + \frac{1}{2}q} \dot{b}_e \\ c &= \frac{Q}{Q + \frac{1}{2}q} \dot{c}_e \end{aligned}$$

über, welche Relationen zwischen der aktuellen und der energetischen Geschwindigkeit der Kugel darstellen.

Die folgende Diskussion der reinen Selbstinduktionserscheinung wird in zwei wesentlich verschiedene Teile zerfallen.

Erst betrachten wir nur die Bewegung des Mittelpunktes der Kugel, eine Bewegung, welche vollständig gegeben ist durch die zwei explicite betrachteten Kräfte, die fremde Energiekraft und die hydrodynamische Induktionskraft. Bei dieser Diskussion werden wir der Einfachheit halber den Ausdruck der Geschwindigkeit der Kugel als Synonym für die Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Kugel verwenden.

Dann gehen wir zu der Frage von den inducierten Feldern über, wobei, sofern Volumänderungen vorliegen, die Geschwindigkeit der Kugel nicht nur als die Geschwindigkeit ihres Mittelpunktes aufzufassen ist. Bei diesem Studium begegnen wir einem kinematisch-dynamischen Vorgang großer Allgemeinheit, bei welchem die im Mittelpunkte der Kugel angreifende, explicite berechnete Induktionskraft nur eine ergänzende Rolle spielt neben den im ganzen Flüssigkeitsfelde auftretenden Druckkräften, die wir nie explicite betrachtet haben, während doch ihre Eigenschaft, Bewegungen nur potentieller Natur zu erzeugen, die Grundlage aller unserer kinematischen Betrachtungen bildete.

97. Vergleich der Bewegung der Kugel im leeren Raume und in der Flüssigkeit. — Da in dem vorliegenden Falle die selbst-inducierende Kraft die einzige wirksame Kraft hydrodynamischen Ursprunges, und die energetische eine vollständig fremde, nicht hydrodynamische Kraft ist, kommen wir zu der folgenden einfachen Auffassung der energetischen Geschwindigkeit.

Die energetische Geschwindigkeit ist diejenige Geschwindigkeit, welche die Kugel im leeren Raume würde angenommen haben unter

dem Einflusse derselben fremden Kraft, die in der Flüssigkeit auf sie wirkt.

Diese Bemerkung führt von selbst zu einer einfachen Form der Diskussion der Bewegung der Kugel in der Flüssigkeit. Wir vergleichen die Gesetze dieser Bewegung mit den uns vollständig vertrauten Gesetzen der Bewegung, welche dieselbe Kugel im leeren Raume unter sonst gleichen Bedingungen annimmt, das heisst unter dem Einflusse einer Kraft, welche in beiden Fällen als dieselbe Funktion der Zeit auftritt; denn bei der Integration 91 war die Zeit die Variable. Da die Kugel bei der Bewegung einmal in der Flüssigkeit und einmal im leeren Raume zu den verglichenen Zeitpunkten im allgemeinen verschiedene Lagen einnimmt, so werden die Kräfte, welche als dieselben Funktionen der Zeit auftreten, meistens verschieden sein, wenn sie als Funktionen der Koordinaten betrachtet werden. Von dieser Abhängigkeit der Kraft von den Koordinaten sehen wir aber ganz ab.

Unter den somit festgestellten Voraussetzungen sagen die Gleichungen 96(e) unmittelbar folgendes über die Bewegung der Kugel in der Flüssigkeit und die gewählte Vergleichsbewegung im leeren Raume aus:

Unter dem Einflusse derselben äusseren Kraft wird sich die Kugel in der Flüssigkeit mit

$$(a) \quad \frac{Q}{Q + \frac{1}{2}q}$$

mal kleinerer Geschwindigkeit als im leeren Raume bewegen.

Der Faktor (a), oder das Hemmungsverhältnis, hängt nur von der Verhältniszahl $Q : q$ ab, und nimmt mit dem Werte dieser Verhältniszahl immer zu. Ist $Q : q$ gleich Null, die Kugel also unendlich leicht relativ zu der Flüssigkeit, so wird (a) gleich Null oder es tritt absolute Hemmung der Bewegung der Kugel ein; an der anderen Grenze, wenn $Q : q$ unendlich, die Kugel also unendlich schwer im Verhältnisse zu der Flüssigkeit ist, erreicht (a) seinen grössten Wert 1, so dass die Hemmung verschwindet. Sonst ist das Hemmungsverhältnis eine Konstante, wenn die Kugel unveränderliches Volumen hat, dagegen eine von der Zeit abhängige Grösse, wenn sie veränderliches Volumen hat, so dass die Dichte Q variabel ist.

Wir betrachten erst den einfachen Fall, dass die Kugel konstantes Volumen hat, und dass die fremde Kraft schon zu wirken aufgehört hat. Bei der Vergleichsbewegung im leeren Raume wird dann die Kugel mit der konstanten Geschwindigkeit $(\dot{a}_e, \dot{b}_e, \dot{c}_e)$ fort-

schreiten, und die durch Multiplikation mit dem konstanten Faktor (a) entstandene Geschwindigkeit ($\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}$) wird also auch konstant sein. Die induzierende Kraft, welche in diesem Falle die Form 96 (b'') hat, hört also zu wirken auf, und die Kugel schreitet fort wie im leeren Raume, wenn keine Kraft eingreift. Der Einfluß der Flüssigkeit zeigt sich nur darin, daß die erreichte Geschwindigkeit ($\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}$) im Verhältnis (a) kleiner ist als im leeren Raume, und zwar beruht dieses auf dem vorhergehenden Eingreifen der selbstinducierenden Kraft zu der Zeit, wo die Bewegung erzeugt wurde.

Hat die Kugel veränderliches Volumen, so wird die Vergleichsbewegung im leeren Raume nach genau denselben Gesetzen verlaufen, als wenn sie konstantes Volumen hätte, im besonderen wird die energetische Geschwindigkeit ($\dot{a}_e, \dot{b}_e, \dot{c}_e$) konstant sein, nachdem die Kraft zu wirken aufgehört hat. Die Induktionskraft hat aber jetzt die allgemeinste Form 96 (b'), und wird nicht mehr gleichzeitig mit der Energiekraft verschwinden, sondern in einer eigentümlichen Weise regulierend in die Bewegung eingreifen. Die Geschwindigkeit ($\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}$) wird nämlich, wegen der konstanten Natur von ($\dot{a}_e, \dot{b}_e, \dot{c}_e$) und der veränderlichen Natur des Faktors (a) eine veränderliche sein, und zwar so, dass die Kugel bei größter Dichte am schnellsten und bei kleinster Dichte am langsamsten fortschreitet. Liegen also beispielsweise periodische Volumänderungen oder Pulsationen vor, so wird ein eigentümlicher Rhythmus in dem Fortschreiten der Kugel eintreten, aber so, daß ihre Geschwindigkeit im Mittel konstant bleibt. Die Bewegung der Kugel wird dann in zwei einander superponierten Partialbewegungen bestehen, einer gleichmäßig fortschreitenden und einer oscillierenden. Es ist wichtig, zu beachten, daß diese eigentümlichen selbstinducierten Oscillationen der Kugel nicht mit den Pulsationen synchron, sondern um eine viertel Phase verschoben sind, denn die Geschwindigkeit ($\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}$) wird nach 96 (e) bei kleinstem Volumen am größten, während die Pulsationsintensität bei mittlerem Volumen am größten ist.

Der Vergleich mit dem Felde der Figur 8 ist lehrreich. Der neutrale Punkt des Feldes wird während der Expansionsbewegung hinter und während der Kontraktionsbewegung vor der Kugel liegen. Dabei bewegt sich die Kugel, als würde sie von dem neutralen Punkte angezogen: ihre Bewegung wird verzögert, wenn dieser Punkt hinten, beschleunigt, wenn er vor der Kugel liegt.

98. Die Bahn der Kugel. — In dem einfacheren Falle, wo die Kugel konstantes Volumen hat, können wir auch unmittelbar

ihre Bahnen im leeren Raume und in der Flüssigkeit vergleichen. Denn wenn der Reduktionsfaktor eine von der Zeit unabhängige Grösse ist, lassen sich die Gleichungen 96(e) nach der Zeit integrieren. Wenn wir dabei sofort die Integrationskonstante gleich Null setzen, führt die Integration zu den Gleichungen

$$(a) \quad \begin{aligned} a &= \frac{Q}{Q + \frac{1}{2}q} a_e \\ b &= \frac{Q}{Q + \frac{1}{2}q} b_e \\ c &= \frac{Q}{Q + \frac{1}{2}q} c_e. \end{aligned}$$

a, b, c sind hier die Koordinaten des Mittelpunktes der Kugel, wenn sie sich in der Flüssigkeit bewegt, und a_e, b_e, c_e können als die Koordinaten der Kugel im Falle der idealen Vergleichsbewegung aufgefaßt werden. Wir finden also das Resultat:

Unter dem Einflusse derselben äusseren Kraft wird eine Kugel konstanten Volumens eine ähnliche Bahn in der Flüssigkeit wie im leeren Raume durchlaufen, nur daß die linearen Dimensionen in demselben konstanten Verhältnisse wie die Geschwindigkeit verkleinert werden.

Daß wir, wie schon hervorgehoben, die Kraft als Funktion der Zeit und nicht als Funktion der Koordinaten betrachten, muß hier besonders festgehalten werden. Das folgende Beispiel wird den Unterschied erläutern. Eine an einem elastischen Stabe befestigte Kugel wird im leeren Raume in einer LISSAJOUS'schen Kurve herumlaufen. Wenn die Kugel eine solche Kurve durchläuft, wird die Kraft als eine bestimmte Funktion der Zeit auftreten. Wenn die Kugel jetzt in die Flüssigkeit eingebracht wird, so tritt die Bewegung in der verkleinerten LISSAJOUS'schen Kurve ein, wenn die Kraft dieselbe Funktion der Zeit bleibt. Diese Kraft erhält man aber nicht durch die Befestigung der Kugel auf demselben Stabe, denn das würde zur Folge haben, daß die Kraft, als Funktion der Koordinaten betrachtet, dieselbe bliebe, und folglich eine andere, als die verlangte, wenn die Kugel in der kleineren Bahn herumliefe. Der Versuch im leeren Raume dient also nur zu der rein mathematischen Definition der verlangten Kraft als Funktion der Zeit, und zwar würde man, um den konkreten Versuch auszuführen, einen steiferen Stab zu wählen haben, wenn sich die Kugel in der Flüssigkeit bewegen soll.

Der Satz ist nicht mehr gültig, wenn die Kugel veränderliches Volumen hat. Indessen kann man leicht die Natur der dabei ein-

tretenden Modifikationen der Bahn überblicken. Die Kugel hat bei größerer Dichte etwas größere, bei kleinerer Dichte etwas kleinere Geschwindigkeit, als bei einer konstanten mittleren Dichte. Die Kugel veränderlichen Volumens wird deshalb abwechselnd etwas vor oder etwas nach der Kugel konstanten Volumens kommen, und bei schnellen Pulsationen mit kleinen Amplituden wird der Unterschied unerheblich sein, so daß wir in den meisten Fällen den aufgestellten Satz benutzen können, jedenfalls, um uns qualitativ über die Bahn der Kugel zu orientieren. Und zwar wird es um so genauer geschehen können, je kleiner die Volumänderungen sind.

99. Das Feld der inducierten Geschwindigkeit, wenn die Kugel konstantes Volumen hat. — Die eben durchgeführte Diskussion der Bewegung des Mittelpunktes der Kugel erläutert die allgemeine Wirkungsweise der selbstinducierenden Kraft **96(b)**. Wir gehen jetzt zu der Betrachtung der Felder über, indem wir nach der Definition **93(B)** das energetische Feld ausscheiden, um das zurückbleibende inducierte Feld besonders zu studieren.

Um erst den einfachsten Fall zu untersuchen, denken wir uns, daß die Kugel konstantes Volumen hat. In **96(a)** ist dann \dot{d} gleich Null, und das Potential Φ der inneren Geschwindigkeit vereinfacht sich auf:

$$(a) \quad \Phi = \dot{a}(x - a) + \dot{b}(y - b) + \dot{c}(z - c).$$

Dieses Potential können wir in derselben Weise wie die Geschwindigkeit **92(c)** zerlegen, nämlich in das Potential der energetischen,

$$(b) \quad \Phi_e = \dot{a}_e(x - a) + \dot{b}_e(y - b) + \dot{c}_e(z - c),$$

und das Potential der inducierten Geschwindigkeit,

$$(c) \quad \Phi_i = \dot{a}_i(x - a) + \dot{b}_i(y - b) + \dot{c}_i(z - c).$$

Stellen wir uns auf den Standpunkt unserer früheren, rein kinematischen Betrachtungen, so haben wir es nur mit dem Potential (a) der aktuellen Geschwindigkeit zu thun. Aus rein kinematischen Betrachtungen haben wir abgeleitet, daß die Kugel, wenn sie die durch dieses Potential gegebene Bewegung hat, eine solenoidal anschließende Bewegung in der Flüssigkeit erzwingt, welche durch das Potential

$$(d) \quad \varphi = -\frac{1}{2} \frac{d^3}{r^3} \dot{a}(x-a) + \dot{b}(y-b) + \dot{c}(z-c)$$

dargestellt wird.

Jetzt betrachten wir aber denselben Vorgang von dem Standpunkte unserer eben angestellten dynamischen Überlegungen aus. Befindet sich dann die Kugel erst im leeren Raume, so entsteht die durch das Potential (b) der energetischen Geschwindigkeit dargestellte Bewegung. Befindet sie sich aber in der Flüssigkeit, so entstehen außer der energetischen auch zwei andere Bewegungen: die durch (d) gegebene Bewegung der umgebenden Flüssigkeit, und die durch (c) gegebene inducierte Bewegung der Kugel. Die letztere superponiert sich der energetischen (b) und erzeugt dadurch die tatsächliche Bewegung (a) im Innern der Kugel.

In Anschluß an diese Betrachtungen können wir sagen: die Potentiale (a) und (d) stellen kinematisch zusammengehörende, aus kinematischen Gründen gleichzeitig miteinander entstehende Bewegungen dar; (d) und (c) dagegen stellen dynamisch zusammengehörende, aus dynamischen Gründen gleichzeitig miteinander entstehende Bewegungen dar. Das Studium der kinematisch zusammengehörenden Bewegungen bildete im vorhergehenden, kinematischen Teil unseren einzigen Gegenstand. Jetzt erweitert sich die Aufgabe so, daß wir zugleich die dynamisch zusammengehörenden Bewegungen in die Untersuchung aufzunehmen haben.

Das Feld dieser dynamisch zusammengehörenden Bewegungen heißt nach unserer Definition 93 (B) das inducierte Feld. Dasselbe bildet ein vollständiges Vektorfeld, und wir werden dasselbe untersuchen, genau wie wir früher das aus zwei kinematisch zusammengehörigen Feldern gebildete Gesamtfeld untersucht haben.

Die zwei Felder (d) und (c) für sich betrachtet, sind LAPLACE'sche Felder, genau wie die kinematisch zusammengehörigen (a) und (b). Alles wird deshalb auf die Verhältnisse an der Grenzfläche ankommen. Vergleichen wir besonders die Werte der Potentiale (c) und (d) an der Oberfläche der Kugel. Wir substituieren also $r = d$, und geben gleichzeitig x, y, z die Werte x', y', z' , welche die laufenden Koordinaten an der Kugelfläche sind. Erinnern wir uns dann zugleich der Werte 96 (d) der inducierten Geschwindigkeitskomponenten, so ergibt sich ohne weiteres zwischen den Potentialwerten φ' und Φ'_i an der Oberfläche der Kugel die einfache Relation:

$$(e) \quad q \varphi' = Q \Phi'_i.$$

Differentiiert man längs einer zur Grenzfläche tangentiellen Richtung s , und stellt nachher die Gleichung um, so ergibt sich:

$$(f) \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial s} : \frac{\partial \Phi'_i}{\partial s} = Q : q.$$

Also finden wir das einfache Resultat, daß sich an der Grenzfläche die tangentiellen Geschwindigkeitskomponenten umgekehrt wie die Dichtigkeiten verhalten.

100. Einführung der Feldintensität. — Diese Grenzflächenbedingung ist mit keiner der beiden als besonders wichtig hervor-gehobenen Grenzflächenbedingungen, nämlich der solenoidalen (8) und der potentiellen (9), identisch. Offenbar ist sie aber mit der potentiellen nahe verwandt, und es genügt, die Geschwindigkeiten durch die entsprechenden Feldintensitäten (94) zu ersetzen, um Vektorfelder zu erhalten, deren Potentiale

$$(a) \quad \varphi = q \varphi, \quad \bar{\Phi} = Q \Phi_i$$

sich an der Grenzfläche kontinuierlich aneinander schließen:

$$(b) \quad \varphi' = \bar{\Phi}'.$$

Die Feldintensität erfüllt also die potentielle Grenzflächenbedingung, und da zugleich beide Partialfelder potentiell sind, so bilden sie zusammen ein potentielles Gesamtfeld (9).

Multiplicieren wir die expliziten Ausdrücke 99(c) und (d) mit Q und q , und benutzen die Bezeichnungen 94(a), so ergeben sich als explizite Ausdrücke der Feldintensitätspotentiale:

$$(c) \quad \begin{aligned} \varphi &= -\frac{1}{2} \frac{d^3}{r^3} \left\{ \bar{a}(x-a) + \bar{b}(y-b) + \bar{c}(z-c) \right\} \\ \bar{\Phi} &= \bar{A}(x-a) + \bar{B}(y-b) + \bar{C}(z-c). \end{aligned}$$

Da $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$, und folglich auch $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ gleich Null sind, so reducieren sich gleichzeitig die Gleichungen 94(b) auf:

$$(d) \quad \bar{A} = -\frac{1}{2} \bar{a}, \quad \bar{B} = -\frac{1}{2} \bar{b}, \quad \bar{C} = -\frac{1}{2} \bar{c}.$$

Von den expliziten Potentialausdrücken (c) in Verbindung mit den Relationen (d) kommt man auch unmittelbar zu der Gleichung (b)

und dem Resultat über die potentielle Natur der Feldintensität im ganzen Raume zurück.

101. Vollständiges Potentialfeld und vollständiges Solenoidalfeld. — Von unserer früheren Beschreibung der vorliegenden Bewegungserscheinung durch die Geschwindigkeit, welche ein vollständiges Solenoidalfeld bildet, sind wir also zu einer neuen Beschreibungsform gelangt, wo eine im ganzen Raume potentielle Vektorgröße, die Feldintensität, zur Verwendung kommt. Das vollständige Solenoidalfeld ist in der Figur 7 durch ein System von vollständig in sich geschlossenen Stromröhren dargestellt. Eine Darstellung des vollständigen Potentialfeldes würde man erhalten, wenn man die zu den Kurven der Figur 7 normal verlaufenden Kurven zeichnete. Diese Kurven würden bei der Umdrehung der Figur die sich kontinuierlich durch die Grenzfläche fortsetzenden Äquipotentialflächen der Feldintensität darstellen. Wählt man die nacheinander folgenden Kurven oder Flächen mit Potentialunterschied Eins und benutzt eine hinlänglich kleine Einheit, so erhält man die lamelläre Darstellung (6) des vollständigen Potentialfeldes.

Hierbei ist zunächst zu bemerken, daß man in beiden Fällen eine gleich vollständige Beschreibung der vorliegenden Bewegungserscheinung erreicht. Denn ist die aktuelle Geschwindigkeit durch die Potentiale 99 (a) und (d), und sind zugleich die Dichtigkeiten q und Q gegeben, so kann man in eindeutiger Weise, wie oben entwickelt, erst die energetische Geschwindigkeit ausscheiden, und dann durch Multiplikation der rückbleibenden inducierten Geschwindigkeiten mit den Dichtigkeitsfaktoren zu den Potentialen der Feldintensitäten 100 (a) und (c) gelangen. Sind andererseits diese Feldintensitätspotentiale und zugleich die Dichtigkeiten q und Q gegeben, so kann man durch Division durch die Dichtigkeiten zu den Potentialen der inducierten Geschwindigkeiten zurückkommen, und von der inducierten Geschwindigkeit der Kugel schließt man nach den Gleichungen 96 (d) eindeutig auf ihre aktuelle Geschwindigkeit.

Zur weiteren Veranschaulichung haben wir in den Figuren 24 und 25 die beiden Felder durch Pfeile dargestellt, welche die Größe und Richtung der Vektoren darstellen. Die beiden formell gleichberechtigten Beschreibungsformen lassen verschiedene Eigenschaften der Bewegung zu Tage treten.

Die Darstellung durch Geschwindigkeit (Fig. 24) ist zunächst die anschaulichste, weil man sofort die richtige Vorstellung von der Ortsveränderung der Kugel erhält. Weiter zeigt diese Darstellung

unmittelbar, wie das Fortschreiten der Kugel die Bewegung in der Flüssigkeit aus rein kinematischen Ursachen hervorzwängt.

Die zweite Figur zeigt, wie die Flüssigkeit dynamisch gegen die aus kinematischen Ursachen hervorgegangene Bewegung reagiert.

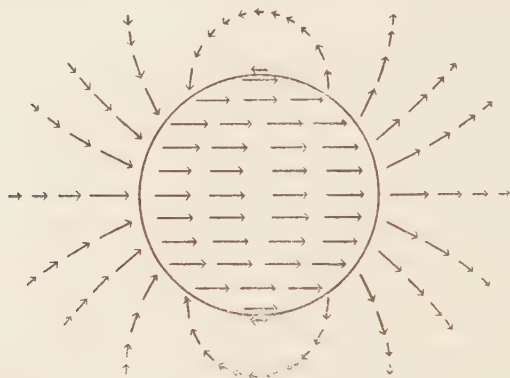


Fig. 24. Geschwindigkeitsfeld der fortschreitenden Kugel.

Die Feldintensitäten stellen nach der dynamischen Definition 94(B) Kraftimpulse pro Volumeinheit dar, wobei man beachten muß, daß der Impuls der die Kugel angreifenden fremden Kraft nicht mitzurechnen ist, so daß wir nur mit denjenigen Impulsen zu thun haben, welche die Flüssigkeit von seiten der Kugel, und die Kugel von seiten

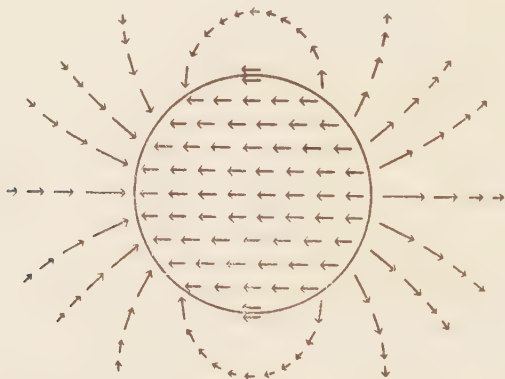


Fig. 25. Feldintensitätsfeld der fortschreitenden Kugel.

der Flüssigkeit erleidet. Die Pfeile im äußeren Raume der Figur 25 zeigen also die Impulse, welche jede Volumeinheit der Flüssigkeit seit dem Anfang der Bewegung infolge des Hervordringens der Kugel erhalten hat. Die rückwärts gerichteten Pfeile innerhalb der

Kugel zeigen die Impulse, welche die Kugel von seiten der Flüssigkeit erhalten hat. Diese Impulse besitzen die sehr bemerkenswerte Eigenschaft, die potentielle Fortsetzung der Impulse im äusseren Raume zu bilden. Die energetische Kraft, welche die primäre Ursache der ganzen Bewegung ist, muß aufer der Trägheit der Kugel zugleich diese rückwärts gerichteten Impulse überwinden, um die thatsächlich vorliegende Bewegung herzustellen.

Eine auffällige Analogie mit elektrischen und besonders mit magnetischen Feldern wird ein jeder mit der Theorie solcher Felder vertraute Leser bemerkt haben. Wie die zwei verschieden aussehenden Figuren 24 und 25 zu der Darstellung einer und derselben Bewegungserscheinung verwendet werden können, können sie auch zur Darstellung eines und desselben magnetischen Feldes dienen, nämlich desjenigen einer homogen magnetisierten Kugel: Man bringt, je nach den Umständen, zwei verschieden definierte Vektorgrößen zur Verwendung bei der Beschreibung des Feldes, im einen Fall eine im ganzen Raume solenoidale, im anderen Fall eine im ganzen Raume potentielle Vektorgröße. Die systematische Untersuchung der Analogieen dieser Natur werden wir aber nach unserem Plan auf eine spätere Zeit verschieben, um erst die Dynamik unseres Systems vollständig zu erledigen.

102. Aktionsschicht. — Die Impulse, welche die Kugel der Flüssigkeit, und die Flüssigkeit rückwirkend der Kugel mittheilt, werden durch die Grenzfläche zwischen Kugel und Flüssigkeit ausgetauscht. An dieser Grenzfläche hat man also, schon wenn man rein mechanische Betrachtungen zu Grunde legt, die Quellen des Feldintensitätsfeldes zu suchen.

Dasselbe ist der Fall, wenn man die Sache rein mathematisch betrachtet. Denn das Feld ist ein vollständiges Potentialfeld, und muß als solches notwendig Divergenzen haben, die als Quellen des Vektorflusses auftreten. Die Divergenz wird im vorliegenden Fall nur als Flächendivergenz an der Oberfläche der Kugel auftreten können, da beide Partialfelder LAPLACE'sche Felder sind. Mit Rücksicht auf die Auffassung der Grenzfläche als der Stelle, wo die mechanischen Wirkungen anfangen, und der dort vorhandenen Divergenzschicht als eines Mafses dieser Wirkungen werden wir die Divergenzschicht der Feldintensität als die Aktionsschicht bezeichnen.

Die Flächendivergenz ist nach 4(a') die Differenz der normalen Vektorkomponenten auferhalb und innerhalb der Kugel. Nach 100(c) erhalten wir, unter Berücksichtigung der Formel 62(c)

$$\left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r}\right)_{r=a} = \bar{a} \frac{x' - a}{d} + \bar{b} \frac{y' - b}{d} + \bar{c} \frac{z' - c}{d}$$

$$\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r}\right)_{r=a} = \bar{A} \frac{x' - a}{d} + \bar{B} \frac{y' - b}{d} + \bar{C} \frac{z' - c}{d}.$$

Also wird die Flächendivergenz der Feldintensität oder die Dichte der Aktionsschicht:

$$(a) \quad \bar{e}' = (\bar{a} - \bar{A}) \frac{x' - a}{d} + (\bar{b} - \bar{B}) \frac{y' - b}{d} + (\bar{c} - \bar{C}) \frac{z' - c}{d},$$

oder unter Benutzung von **100**(d):

$$(a') \quad \bar{e}' = \frac{3}{2} \left\{ \bar{a} \frac{x' - a}{d} + \bar{b} \frac{y' - b}{d} + \bar{c} \frac{z' - c}{d} \right\},$$

oder endlich, wenn wir durch \bar{s} einen Vektor mit den Komponenten $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ bezeichnen, und wie früher unter θ den Winkel zwischen dem Radiusvektor und der Fortschreitungsrichtung der Kugel verstehen:

$$(a'') \quad \bar{e}' = \frac{3}{2} \bar{s} \cos \theta.$$

Der Vergleich mit den Entwicklungen **32** und mit der Figur 6, b ist lehrreich. Denken wir uns die punktierten Buchstaben der Formeln **32**(a) bis (d'') durch gestrichene ersetzt, so würde **32**(c'') die Dichte der Aktionsschicht darstellen, und diese Dichte wird durch die punktierten, radial gerichteten Pfeile der Figur 6, b graphisch veranschaulicht. Gleichzeitig würde **32**(d'') die inducierte Feldintensität **100**(d) im Innern der Kugel sein. Dieselbe ist in der Figur 6, b durch die rückwärts zeigenden punktierten Pfeile dargestellt, und in der Figur 25 findet man sie für das ganze Innere der Kugel gezeichnet.

Mit Hilfe der GröÙe \bar{e} läßt sich nach der Formel **11**(a) das Potential des vorliegenden vollständigen Potentialfeldes durch die Quadratur

$$(b) \quad \bar{\psi} = - \int \frac{\bar{e}' d\sigma'}{4 \pi r'}$$

darstellen, wo $d\sigma'$ ein Oberflächenelement der Kugel ist, und r' die Entfernung des beliebigen Raumpunktes x, y, z , wo der Wert des Potentials gesucht wird, von dem Oberflächenpunkt x', y', z' der Kugel. Das durch Integration über die ganze Kugeloberfläche gefundene $\bar{\psi}$ wird mit $\bar{\varphi}$ identisch sein, wenn x, y, z ein Punkt außerhalb der Kugel ist, und mit $\bar{\Phi}$, wenn x, y, z ein innerer Punkt ist.

103. Aktionsintensität und dynamisches Aktionsmoment. — Die Aktionsschicht tritt als die Normalkomponente einer Vektorgröße

$$(a) \quad \vec{f} = \vec{a} - \vec{A}, \quad \vec{g} = \vec{b} - \vec{B}, \quad \vec{h} = \vec{c} - \vec{C}$$

oder

$$(a') \quad \vec{f} = \frac{3}{2} \vec{a}, \quad \vec{g} = \frac{3}{2} \vec{b}, \quad \vec{h} = \frac{3}{2} \vec{c},$$

oder schließlich

$$(a'') \quad \frac{3}{2} \vec{s}$$

auf, welche wir die Aktionsintensität innerhalb der Kugel nennen können. Die Formeln (a) entsprechen der dynamischen Definition dieser Größe als der Differenz von zwei auf die Einheit des Volumens bezogenen Bewegungsgrößen oder Impulsen. Die Ausdrücke (a') oder (a'') dagegen gestatten uns die Aktionsintensität durch Größen zu definieren, die wir schon von unseren kinematischen Betrachtungen her kennen. Denn erinnern wir uns der ersten Definition **33(A)** der Aktionsgeschwindigkeit der Kugel und der Formeln **94(a)**, so sehen wir, daß die Aktionsintensität einfach die mit der Dichte der Flüssigkeit multiplizierte Aktionsgeschwindigkeit der Kugel ist.

Die Aktionsintensität ist innerhalb der Kugel überall konstant. Das Produkt der Aktionsintensität in das Volumen E der Kugel werden wir das dynamische Aktionsmoment der Kugel nennen, und seine Komponenten durch \vec{F} , \vec{G} , \vec{H} bezeichnen:

$$(b) \quad \vec{F} = \frac{3}{2} \vec{a} E, \quad \vec{G} = \frac{3}{2} \vec{b} E, \quad \vec{H} = \frac{3}{2} \vec{c} E.$$

Der Vergleich mit den Formeln **33(b)** zeigt sofort, daß das dynamische Aktionsmoment der Kugel einfach dem mit der Dichte der Flüssigkeit multiplizierten kinematischen Aktionsmoment der Kugel gleich ist.

Mit Hilfe des dynamischen Aktionsmomentes drückt sich das Potential φ am einfachsten aus. Denn wenn man in **100(c)** den Radius d durch das Volumen E der Kugel ersetzt, so ergibt sich unmittelbar

$$(c) \quad \varphi = - \frac{\vec{F}(x-a) + \vec{G}(y-b) + \vec{H}(z-c)}{4\pi r^3}.$$

Durch eine bekannte Transformation des Oberflächenintegrals **102(b)** in ein Volumintegral kommt man auf eine andere sehr bemerkenswerte Form dieses Potentials, nämlich die folgende, wo

die Aktionsintensität im Innern der Kugel an Stelle der Dichte der Aktionsschicht getreten ist:

$$(d) \quad \bar{\psi} = - \int \left\{ \bar{f} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{4\pi r_1} + \bar{g} \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{4\pi r_1} + \bar{h} \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{4\pi r_1} \right\} d\tau_1.$$

Hier ist x_1, y_1, z_1 ein beliebiger Punkt innerhalb der Kugel, und $d\tau_1$ ein Volumelement derselben; r_1 bedeutet den Abstand von dem Punkte x_1, y_1, z_1 innerhalb der Kugel zu dem beliebigen Raumpunkte x, y, z , wo der Wert des Potentials $\bar{\psi}$ gesucht wird. Die Integration ist über das ganze Volumen der Kugel auszudehnen.

104. Das Feldintensitätsfeld der volumändernden Kugel mit ruhendem Mittelpunkte. — In dem somit vollständig diskutierten Specialfalle zeigt es sich also, daß die Anwendung der Feldintensität als beschreibende Vektorgröße anstatt oder neben der Geschwindigkeit bedeutende Vorteile darbietet und charakteristische Eigenschaften der Bewegung hervortreten läßt. Untersuchen wir jetzt, in wie weit wir dadurch auf eine Erscheinung größerer Allgemeinheit gestossen sind, und ob die Einführung der Feldintensität auch in allgemeineren Fällen ähnliche Vorteile darbietet.

Wir betrachten zu dem Zwecke erst den Fall einer volumändernden Kugel, welche keine translatorische Bewegung hat. Es wirkt dann keine Energiekraft; wir haben keine Gelegenheit ein energetisches Feld auszuschleiden, sondern müssen das Feld, wie es vorliegt, nach der Definition 93(B) als ein induciertes Feld betrachten.

Schon das Geschwindigkeitsfeld ist aber in diesem Falle ein vollständiges Potentialfeld, da die tangentiellen Geschwindigkeitskomponenten an der Grenzfläche identisch Null sind, so daß die potentielle Grenzflächenbedingung gleichzeitig mit der solenoidalen identisch erfüllt wird (20).

Gehen wir nachher durch Multiplikation mit den Dichten von den Geschwindigkeiten zu den Feldintensitäten über, so wird die solenoidale Grenzflächenbedingung nicht mehr erfüllt. Denn die Normalkomponenten der Feldintensitäten werden sich zu einander wie die Dichten auf den beiden Seiten der Grenzfläche verhalten. Die Tangentialkomponenten bleiben aber Null, so daß die potentielle Grenzflächenbedingung fortwährend befriedigt bleibt.

Das entsprechende, im ganzen Raume kontinuierliche Potential der Feldintensität geht nicht unmittelbar aus den in 18(a) und (c)

aufgeschriebenen Geschwindigkeitspotentialen durch Multiplikation mit den Dichten hervor, sondern man muß erst das Potential im inneren Raume 18(a) durch eine leicht zu bestimmende additive Konstante ergänzen. Man findet, wenn man als Parameter die in 94(a) eingeführten Größen \bar{d} und \bar{D} benutzt:

$$(a) \quad \begin{aligned} \varphi &= -\frac{d^2}{r} \bar{d} \\ \Phi &= -d \bar{d} + \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{D}}{\bar{d}} r^2 - \bar{D} d \right). \end{aligned}$$

Die Substitution $r = d$ führt, wie man sofort sieht, zur Kontinuität des Potentials an der Grenzfläche, $\varphi' = \Phi'$, so daß wieder die beiden partiellen Potentialfelder ein potentielles Gesamtfeld bilden.

In diesem Felde sind gleichzeitig kubische Divergenz im Innern der Kugel, und Flächendivergenz an der Kugelfläche vorhanden. Für die normale Vektorkomponente an der Grenzfläche findet man aus (a)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=d} &= d \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{r=d} &= \bar{D}. \end{aligned}$$

Die Flächendivergenz, oder, wie wir wieder sagen werden, die Dichte der Aktionsschicht auf der Kugelfläche wird also

$$(b) \quad \bar{e} = \bar{d} - \bar{D}.$$

Für die Divergenz der Feldintensität im Innern der Kugel findet man aus der zweiten Formel (a) oder auch nach 19(e)

$$(c) \quad \nabla^2 \Phi = 3 \frac{\bar{D}}{d} = \bar{e},$$

wo \bar{e} das Produkt

$$(c) \quad \bar{e} = Q \dot{e}$$

der spezifischen Ausdehnungsgeschwindigkeit in die Dichte der Kugel ist.

Die relativen Beträge der Flächendivergenz und der kubischen Divergenz verändern sich je nach der relativen Dichte der Kugel und der Flüssigkeit. Haben beide gleiche Dichte, so ist $\bar{d} = \bar{D}$, die Oberflächenschicht verschwindet und alles reduciert sich auf die

kubische Divergenz im Innern der Kugel. Hat die Kugel sehr kleine Dichte, so hat man im Innern der Kugel ein sehr schwaches Feldintensitätsfeld mit schwacher Divergenz, aber an der Oberfläche eine starke Divergenzschicht. Ist schliesslich die Dichte der Kugel sehr gross, so hat man im Innern ein starkes Feldintensitätsfeld mit starker kubischer Divergenz, während an der Grenzfläche eine negative, neutralisierende Divergenzschicht auftritt. Die Summe sämtlicher Flächendivergenzen und sämtlicher kubischer Divergenzen werden wir das Volumänderungsmoment der Kugel nennen und durch \bar{E} bezeichnen. Die Definition dieser Grösse wird also

$$(d) \quad \bar{E} = \int \bar{e}' d\sigma' + \int \bar{e} d\tau,$$

wo die Integrationen über die ganze Oberfläche und das ganze Volumen der Kugel auszudehnen sind. Da \bar{e}' und \bar{e} beide konstante Grössen sind, findet man leicht unter Benutzung der Werte (b) und (c) dieser Grössen

$$(d') \quad \bar{E} = 4\pi d^2 \bar{d},$$

oder

$$(d'') \quad \bar{E} = q \bar{E}.$$

Also:

(A) *Das Volumänderungsmoment ist die mit der Dichte der Flüssigkeit multiplizierte Volumänderungsgeschwindigkeit der Kugel.*

Liegen periodische Volumänderungen vor, so werden wir unter dem Pulsationsmoment den mit Vorzeichen versehenen quadratischen Mittelwert des Volumänderungsmomentes verstehen. Man findet leicht, wenn man sich der Definition 22(a) der Pulsationsintensität erinnert:

(B) *Das Pulsationsmoment ist die mit der Dichte der Flüssigkeit multiplizierte Pulsationsintensität.*

Mit Hilfe der Grössen \bar{e} und \bar{E} lassen sich die Potentiale der Feldintensitäten auch in die Formen

$$(e) \quad \begin{aligned} \bar{\varphi} &= -\frac{\bar{E}}{4\pi r} \\ \bar{\Phi} &= -d\bar{d} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\bar{e}r^2 - \bar{D}d\right) \end{aligned}$$

bringen.

Das Potential des Gesamtfeldes läßt sich in allen Fällen durch Integrale der Form 11(a) ausdrücken, wobei je nach den Umständen

entweder nur das Flächenintegral, oder nur das kubische Integral, oder auch beide Integrale gleichzeitig auftreten.

105. Das Feldintensitätsfeld der volumändernden und fortschreitenden Kugel. — Gehen wir schliesslich zur der Betrachtung des Feldes im allgemeinsten Falle über, wo die Kugel gleichzeitig translatorische und volumändernde Bewegung besitzt. Das Geschwindigkeitsfeld ist dann durch die Potentiale **96**(a) gegeben, die Induktionskraft hat die allgemeine Form **96**(b) oder (b') und die eigentümlichen, in **97** beschriebenen Wirkungen.

Die für den Übergang zu der Feldintensität zu entfernende energetische Bewegung wird genau dieselbe sein, wie im Falle der Kugel konstanten Volumens. Denn im leeren Raume erteilt die fremde Kraft der Kugel genau dieselbe Geschwindigkeit ($\dot{a}_e, \dot{b}_e, \dot{c}_e$), sei es, dass sie konstantes oder veränderliches Volumen hat. Hieraus folgern wir leicht, dass das Potential der Feldintensität einfach durch Superposition der partiellen Potentiale **100**(c) und **104**(a) gebildet werden kann. Wir finden also für den äusseren und inneren Raum beziehungsweise die Potentiale:

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{d^2}{r} \bar{d} - \frac{1}{2} \frac{d^3}{r^3} \left\{ \bar{a}(x-a) + \bar{b}(y-b) + \bar{c}(z-c) \right\} \\ \text{(a)} \quad \bar{\Psi} &= -d\bar{d} + \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{D}}{d} r^2 - \bar{D}d \right) + \bar{A}(x-a) + \bar{B}(y-b) + \bar{C}(z-c), \end{aligned}$$

welche einander an der Grenzfläche wegen der Relationen **100**(d) kontinuierlich fortsetzen. Da dieses der allgemeinste uns vorliegende Fall der reinen Selbstinduktionserscheinung ist, können wir als das Hauptresultat der Untersuchungen dieses Abschnittes den folgenden Satz aufstellen:

Im Falle der reinen hydrodynamischen Selbstinduktionserscheinung tritt die Feldintensität als eine im ganzen Raume potentielle Vektorgrosse auf.

Die in **97** beschriebene eigentümliche Wirkung der selbst-inducierenden Kraft, welche beispielsweise das rhythmische Fortschreiten der pulsierenden Kugel zur Folge hatte, kann nach diesem Resultate so gedeutet werden, dass diese Kraft regulierend eingreift, um während der Bewegung immer die Kontinuität der tangentiellen Feldintensitätskomponenten zu sichern, selbst wenn die Dichtigkeit der Kugel eine veränderliche ist.

Man hat in diesem Falle sowohl Flächendivergenz, nämlich

$$(b) \quad \bar{e}' = \bar{d} - \bar{D} + (\bar{a} - \bar{A}) \frac{x' - a}{d} + (\bar{b} - \bar{B}) \frac{y' - b}{d} + (\bar{c} - \bar{C}) \frac{z' - c}{d}$$

oder

$$(b') \quad \bar{e}' = \bar{d} - \bar{D} + \frac{3}{2} \left\{ \bar{a} \frac{x' - a}{d} + \bar{b} \frac{y' - b}{d} + \bar{c} \frac{z' - c}{d} \right\}$$

als auch kubische Divergenz im Innern der Kugel

$$(c) \quad \nabla^2 \bar{\Phi} = \bar{e}.$$

Mit Hilfe dieser Divergenzen läßt sich das Feldintensitätspotential im ganzen Raume nach Formel 11 (a) in der Form

$$(d) \quad \bar{\psi} = - \int \frac{\bar{e}' d \sigma'}{4 \pi r} - \int \frac{\bar{e}_1 d \tau_1}{4 \pi r_1}$$

ausdrücken. Die Quadraturen werden im inneren Raume $\bar{\psi} = \bar{\Phi}$, im äußeren Raume $\bar{\psi} = \varphi$ geben.

Vierter Abschnitt.

Die reine Fremdinduktion im Parallelfeld.

106. Entwickelte Form der fremdinducierenden Kraft. — Wie schon hervorgehoben, wird die fremdinducierende Kraft 95 (c) nie allein auftreten können; denn sofern sie überhaupt eine Bewegung erzeugt, wird auch die selbstinducierende gleichzeitig eingreifen. Wir sagen aber, daß die reine Fremdinduktionserscheinung vorliegt, wenn die fremdinducierende Kraft als einzige primäre Bewegungsursache auftritt; wir untersuchen sie deshalb in ihrer Eigenschaft als primär-bewegungserzeugende Kraft.

Der einfachste Ausdruck derselben ist

$$(a) \quad \begin{aligned} X_{fi} &= \frac{3}{2} q \frac{d}{dt} (E \alpha) \\ Y_{fi} &= \frac{3}{2} q \frac{d}{dt} (E \beta) \\ Z_{fi} &= \frac{3}{2} q \frac{d}{dt} (E \gamma) \end{aligned}$$

Durch Ausführung der Differentiation nach der Zeit ergibt sich

$$\begin{aligned} X_{fi} &= \frac{3}{2} q E \ddot{\alpha} + \frac{3}{2} q \dot{E} \dot{\alpha} \\ (a') \quad Y_{fi} &= \frac{3}{2} p E \ddot{\beta} + \frac{3}{2} q \dot{E} \dot{\beta} \\ Z_{fi} &= \frac{3}{2} q E \ddot{\gamma} + \frac{3}{2} q \dot{E} \dot{\gamma}. \end{aligned}$$

Hat die Kugel konstantes Volumen, so vereinfachen sich diese Ausdrücke auf

$$\begin{aligned} X_{fi} &= \frac{3}{2} q E \ddot{\alpha} \\ (a'') \quad Y_{fi} &= \frac{3}{2} q E \ddot{\beta} \\ Z_{fi} &= \frac{3}{2} q E \ddot{\gamma}. \end{aligned}$$

Die Formeln sind ganz ähnlich gebaut, wie die entsprechenden 96(b), (b') und (b'') für die selbstinducierende Kraft: der Unterschied reduciert sich darauf, daß die negative Geschwindigkeit und Beschleunigung der Kugel durch die positive Geschwindigkeit und Beschleunigung des Parallelstromes ersetzt wird, und daß gleichzeitig ein anderer numerischer Faktor auftritt.

Die Formeln (a'') sagen aus, daß, wenn die Kugel konstantes Volumen hat, die fremdinducierende Kraft der Beschleunigung im Parallelstrom proportional ist, und jede Kraft zu wirken aufhört, wenn der Strom mit konstanter Geschwindigkeit in unveränderlicher Richtung fließt. Hat die Kugel dagegen veränderliches Volumen, so ist die Kraft weniger einfach, wie die Formeln (a') zeigen. Die erste Partialkraft ist allerdings immer noch der Beschleunigung im Parallelstrom gleichgerichtet und proportional, aber mit einem von der Zeit abhängigen Proportionalitätsfaktor; gleichzeitig damit tritt eine ergänzende Partialkraft hinzu, welche dem Produkte der Volumenausdehnungsgeschwindigkeit der Kugel in die Geschwindigkeit des Parallelstromes proportional ist. Selbst wenn jede Beschleunigung ($\ddot{\alpha}$, $\ddot{\beta}$, $\ddot{\gamma}$) im Parallelfelde aufhört, wird diese letzte Partialkraft auftreten und regulierend auf die Bewegung der Kugel wirken.

Auf die von der fremdinducierenden Kraft primär erzeugten Bewegungen der Kugel wirkt die selbstinducierende Kraft genau wie im vorhergehenden Falle, als wäre die fremdinducierende Kraft eine äußere, nicht hydrodynamische Kraft gewesen. Auch eine hydrodynamische Energiekraft wird unter den vorausgeschickten Bedingungen im allgemeinen auftreten. Wenn das aber der Fall ist, so nehmen wir an, daß eine äußere nicht hydrodynamische Kraft

ihr das Gleichgewicht hält, so daß die totale Energiekraft gleich Null wird, und keine energetische Geschwindigkeit entstehen kann. Die Bedingungen für das Zustandekommen der reinen Fremdinduktionserscheinung sind dann erfüllt. Wegen des Verschwindens der energetischen Geschwindigkeit wird nach 92(c) die aktuelle Geschwindigkeit mit der inducierten identisch. Die Gleichungen 92(a) und 92(d) reduciren sich dann auf ein und dasselbe Gleichungssystem, nämlich

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{\frac{3}{2} q}{Q + \frac{1}{2} q} \dot{\alpha} \\ (b) \quad \dot{b} &= \frac{\frac{3}{2} q}{Q + \frac{1}{2} q} \dot{\beta} \\ \dot{c} &= \frac{\frac{3}{2} q}{Q + \frac{1}{2} q} \dot{\gamma}, \end{aligned}$$

welches die Geschwindigkeit der Kugel durch die Geschwindigkeit des Parallelstromes ausdrückt.

107. Kugel veränderlichen Volumens im Parallelfelde. — Im Ausdrucke der selbstinducierenden Kraft und der entsprechenden inducierten Geschwindigkeit kommen nur die Geschwindigkeits- oder Beschleunigungskomponenten des Parallelfeldes vor, während die deformativen Geschwindigkeiten $\dot{\alpha}_a, \dot{\alpha}_\beta, \dots$ nicht auftreten. Die Bedingung für das Auftreten unserer Kraft ist also das Vorhandensein oder das Entstehen eines Parallelfeldes. Um wieder erst die Erscheinung unter möglichst einfachen Verhältnissen zu untersuchen, nehmen wir an, daß sich der ganze Einfallsstrom auf einen Parallelstrom

$$(a) \quad \varphi_\gamma = \dot{\alpha}(x-a) + \dot{\beta}(y-b) + \dot{\gamma}(z-c)$$

reduciert. In diesem Einfallsstrome bewegt sich die Kugel unter Volumänderung, und die Geschwindigkeitspotentiale außerhalb und innerhalb derselben werden dann nach 71(a)

$$\Phi = \frac{1}{2} \frac{r^2}{a} \dot{d} + \dot{a}(x-a) + \dot{b}(y-b) + \dot{c}(z-c)$$

$$(b) \quad \varphi = \dot{\alpha}(x-a) + \dot{\beta}(y-b) + \dot{\gamma}(z-c)$$

$$- \frac{d^2}{r} \dot{d} - \frac{1}{2} \frac{d^2}{r^3} \left\{ (\dot{a}-\dot{\alpha})(x-c) + (\dot{b}-\dot{\beta})(y-b) + (\dot{c}-\dot{\gamma})(z-c) \right\}$$

geschrieben werden können. Da nach 106(b) die Geschwindigkeits-

komponenten \dot{a} , \dot{b} , \dot{c} des Mittelpunktes der Kugel den Geschwindigkeitskomponenten $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ des Parallelstromes proportional sind, wird die Bewegung der Kugel immer längs der Translationsrichtung des Feldes stattfinden, so daß wir es mit Feldern zu thun haben, für welche die Figuren 17 bis 21 Beispiele abgeben.

Im allgemeinen besteht eine hydrodynamische Energiekraft **90** (c), welche jedoch verschwindet, wenn die Kugel konstantes Volumen hat. Im letzteren Falle braucht folglich auch keine fremde Kraft einzugreifen, und wir haben dann den einfachen Fall, daß die Kugel ganz passiv im Strome schwimmt, der Gewalt des Stromes überlassen.

Wie früher werden wir erst nur die Bewegung des Mittelpunktes der Kugel untersuchen, um nachher die Frage von den Eigenschaften der Felder in die Diskussion aufzunehmen. Diese Untersuchung des Feldes wird selbstverständlich mit Hilfe der Potentiale (b) der wirklich vorliegenden Bewegung gemacht werden. Solange wir aber nur die Bewegung des Mittelpunktes der Kugel betrachten, wird das Rückgreifen auf das ursprüngliche Parallelfeld (a) zweckmässig sein. Bei dieser ersten Diskussion werden wir uns deshalb die Parallelbewegung (a) der Flüssigkeit und die Bewegung der Kugel als gleichzeitig bestehende und unabhängig aufeinander superponierte Bewegungen vorstellen: der Parallelstrom ist der induzierende Strom, und mit der inducierten Bewegung der Kugel meinen wir nur die Bewegung ihres Mittelpunktes.

108. Vergleich der induzierenden und der inducierten Geschwindigkeit. — Die Gleichungen **106** (b) gestatten sofort einen Vergleich der inducierten Bewegung der Kugel mit der induzierenden Bewegung des Einfallsstromes. Die Gleichungen sagen unmittelbar aus:

Wenn die fremdinducierende Kraft die einzige primäre Bewegungsursache ist, bewegt sich die Kugel mit

$$(a) \quad \frac{\frac{3}{2} q}{Q + \frac{1}{2} q}$$

mal größerer, beziehungsweise kleinerer Geschwindigkeit als die Flüssigkeitspartikelchen des induzierenden Parallelstromes.

Der Faktor (a), der Koeffizient der fremdinducierten Geschwindigkeit ist, genau wie das bei der Selbstinduktion auftretende Hemmungsverhältnis, nur von der Verhältniszahl $Q : q$ abhängig, aber so, daß er bei abnehmenden Werten dieser Verhältnis-

zahl immer zunimmt. Ist $Q:q$ gleich Null, die Kugel also unendlich leicht in Verhältnis zu der Flüssigkeit, so hat der Koeffizient seinen größten Wert 3. Ist $Q = q$, so wird der Koeffizient 1, und an der anderen Grenze, wenn $Q:q$ unendlich groß ist, also die Kugel unendlich schwer im Verhältnis zu der Flüssigkeit, so wird er Null. Er ist wieder eine Konstante bei konstantem Volumen der Kugel, und sonst eine Funktion der Zeit.

Betrachten wir wieder erst den einfachen Fall, daß die Kugel konstantes Volumen hat, und daß folglich auch keine Energiekraft, weder hydrodynamischen noch fremden Ursprunges, eingreift. Der Anfangszustand ist immer derjenige, daß Kugel und Flüssigkeit in Ruhe sind. Im selben Augenblicke, wo die Bewegung der Flüssigkeit anfängt, fängt auch die Bewegung der Kugel an: eine unendlich leichte Kugel wird dreimal so schnell als der Strom laufen, eine Kugel gleicher Dichte genau ebenso schnell als der Strom, während eine unendlich schwere Kugel keine merkbare Bewegung annimmt. Wird die Geschwindigkeit des Parallelstromes konstant, so wird die Geschwindigkeit der Kugel auch konstant; die fremdinducierende Kraft **106**(a''), ebenso wie die selbstinducierende **96**(b''), sind dann identisch Null. In demselben Augenblicke endlich, wo die Bewegung des Stromes aufhört, kommt auch die Kugel zur Ruhe.

Hat die Kugel veränderliches Volumen, so modifizieren sich die Verhältnisse insofern, als erstens eine fremde Energiekraft eingreifen muß, um die hydrodynamische Energiekraft zu neutralisieren, und zweitens die Geschwindigkeit der Kugel bei konstanter Geschwindigkeit des Parallelstromes nicht konstant wird, sondern veränderlich, und zwar in der Weise, daß die Geschwindigkeit der Kugel, umgekehrt wie bei der selbstinducierenden Kraft, am kleinsten wird bei der größten Dichte, und am größten bei der kleinsten Dichte. Dieses ist eine Wirkung des zweiten Gliedes der fremdinducierenden Kraft **106**(a') in Verbindung mit der vollständigen selbstinducierenden Kraft **96**(b'). Wenn die Kugel pulsiert, so wird also ein gewisser Rhythmus in ihr Fortschreiten kommen. Das Feld der Figur 21 wird gleichzeitig wechseln, so daß der neutrale Punkt bald hinter und bald vor der Kugel auftritt: die Kugel wird sich bewegen, als ob sie von diesem Punkte abgestoßen würde.

109. Die Bahn der Kugel. — Ist das Volumen der Kugel konstant, so können wir die Gleichungen **106**(b) nach der Zeit integrieren. Dadurch erhalten wir sofort, wenn wir die für die Diskussion bedeutungslose Integrationskonstante gleich Null setzen:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad a &= \frac{\frac{3}{2}q}{Q + \frac{1}{2}q} \alpha \\
 b &= \frac{\frac{3}{2}q}{Q + \frac{1}{2}q} \beta \\
 c &= \frac{\frac{3}{2}q}{Q + \frac{1}{2}q} \gamma.
 \end{aligned}$$

a, b, c sind hier die Koordinaten des Mittelpunktes der Kugel, und α, β, γ können wir als die Koordinaten irgend eines Partikelchens des inducirenden Parallelstromes auffassen. Es ergibt sich also sofort der Satz:

Die Bahn, welche der Mittelpunkt einer dem Parallelstrome überlassenen Kugel konstanten Volumens durchläuft, ist der Bahn irgend eines Flüssigkeitspartikelchens im inducierenden Parallelstrome ähnlich, nur daß die linearen Dimensionen der Bahn in demselben Verhältnisse wie die Geschwindigkeit vergrößert oder verkleinert sind.

Fassen wir also besonders den Fall ins Auge, wo der äußere Flüssigkeitsstrom von beliebigen periodischen Bewegungen der entfernten Kugeln herrührt, so wird der Parallelstrom periodisch Richtung und Intensität verändern, und die Flüssigkeitspartikelchen werden LISSAJOUS'sche Kurven allgemeinsten Natur durchlaufen. Die Kugel wird dann eine ähnliche LISSAJOUS'sche Kurve als Bahn haben, und zwar höchstens mit den dreifachen lineären Dimensionen. Im Falle geradliniger Oscillationen, wird auch die Kugel geradlinig oscillieren mit höchstens der dreifachen Amplitude.

Hat die Kugel veränderliches Volumen, so ist der Satz nicht länger streng gültig; man überblickt aber leicht die Natur der Abweichungen, welche darin bestehen werden, daß die Koordinaten der Kugel bald etwas größere, bald etwas kleinere Werte haben, als nach dem für die Kugel konstanten Volumens gültigen Satze. Zur Orientierung über die Natur der Bahn in erster Annäherung bleibt also dieser Satz immer brauchbar, und ist sonst um so strenger gültig, je kleiner die Volumänderungen oder die Pulsationen sind.

110. Das Feld der inducierten Geschwindigkeit, wenn die Kugel konstantes Volumen hat. — Nachdem somit die Frage von der Bewegung des Mittelpunktes der Kugel erledigt ist, richten wir unsere Aufmerksamkeit auf die Felder, und zwar nicht mehr auf das oben als Hilfsvorstellung eingeführte inducierende Parallelfeld 107 (a), sondern auf die thatsächlich vorliegenden Felder 107 (b). Wir haben

im Falle der reinen Fremdinduktion kein energetisches Feld auszuscheiden, sondern das vorliegende Gesamtfeld ist schon an sich ein induciertes Feld nach der Definition 93 (B). Um dieses Feld erst unter den möglichst einfachen Verhältnissen zu studieren, denken wir uns, daß die Kugel unveränderliches Volumen hat. Dies war derjenige Fall, wo die hydrodynamische Energiekraft schon an sich Null war, so daß eine äußere Kraft auch nicht einzugreifen brauchte. Die Kugel schwimmt ganz passiv im Strome und reagiert dynamisch nur durch ihre Starrheit und ihre Trägheit.

In den Potentialausdrücken 107 (b) haben wir dann $d = 0$ zu setzen. Als Werte der Konfliktgeschwindigkeiten $a - \dot{\alpha}$, $b - \dot{\beta}$, $c - \dot{\gamma}$ findet man nach 106 (b)

$$\begin{aligned} a - \dot{\alpha} &= \frac{q - Q}{Q + \frac{1}{2}q} \dot{\alpha} \\ (a) \quad b - \dot{\beta} &= \frac{q - Q}{Q + \frac{1}{2}q} \dot{\beta} \\ c - \dot{\gamma} &= \frac{q - Q}{Q + \frac{1}{2}q} \dot{\gamma}. \end{aligned}$$

Wie die absolute Geschwindigkeit (\dot{a} , \dot{b} , \dot{c}) der Kugel durch Multiplikation der Geschwindigkeit ($\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$) des Parallelstromes mit dem Koeffizient der fremdinduzierten Geschwindigkeit entsteht, entsteht die Konfliktgeschwindigkeit durch Multiplikation derselben Geschwindigkeit mit dem Faktor

$$(a') \quad \frac{q - Q}{Q + \frac{1}{2}q}.$$

Mit Rücksicht hierauf können wir (a') als den Koeffizienten der fremdinduzierten Konfliktgeschwindigkeit bezeichnen.

Wir setzen (a) in 107 (b) ein, und erhalten dann als Werte die Geschwindigkeitspotentiale, beziehungsweise im inneren und äußeren Raume

$$\begin{aligned} (b) \quad \Phi &= \frac{\frac{3}{2}q}{Q + \frac{1}{2}q} \left\{ \dot{\alpha}(x - a) + \dot{\beta}(y - b) + \dot{\gamma}(z - c) \right\} \\ \varphi &= \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{q - Q}{Q + \frac{1}{2}q} \frac{d^3}{r^3} \right\} \left\{ \dot{\alpha}(x - a) + \dot{\beta}(y - b) + \dot{\gamma}(z - c) \right\}. \end{aligned}$$

Setzt man hier $r = d$, so findet man wieder unter den Potentialwerten auf der Oberfläche die Relation

$$(c) \quad q \varphi' = Q \Phi',$$

oder die daraus unmittelbar folgende Relation 99(f) zwischen den tangentiellen Vektorkomponenten. Wir finden also wieder, daß sich die tangentiellen Geschwindigkeitskomponenten umgekehrt wie die Dichtigkeiten verhalten.

Wir bemerken noch, daß die Komponenten f, g, h der inducierten Aktionsgeschwindigkeit der Kugel, welche einfach die mit $\frac{3}{2}$ multiplizierten Komponenten der Konfliktgeschwindigkeit sind (68), die Ausdrücke

$$(d) \quad f = \frac{3}{2} \frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q} \alpha, \quad g = \frac{3}{2} \frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q} \beta, \quad h = \frac{3}{2} \frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q} \gamma$$

erhalten. Die entsprechenden Komponenten des inducierten kinematischen Aktionsmomentes werden

$$(e) \quad \dot{F} = \frac{3}{2} \frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q} E \alpha, \quad \dot{G} = \frac{3}{2} \frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q} E \beta, \quad \dot{H} = \frac{3}{2} \frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q} E \gamma.$$

Untersuchen wir jetzt, wie sich das Feld bei verschiedenen Werten der Dichtigkeiten Q und q verändert, um es besonders mit den schon auf der Grundlage einer rein kinematischen Diskussion gezeichneten Figuren 17–20 zu vergleichen.

Wir fangen mit dem Falle an, daß die Kugel relativ zu der Flüssigkeit unendlich leicht ist, so daß wir Q im Vergleiche zu q vernachlässigen können. Die Konfliktgeschwindigkeit (a) wird dann doppelt so groß, und die absolute Geschwindigkeit der Kugel 106(b) dreimal so groß, als die Geschwindigkeit des Parallelstromes, so daß wir den durch Figur 18 dargestellten Fall haben, wo die Stromlinien senkrecht gegen die Oberfläche der Kugel endigen. Die tangentielle Geschwindigkeit der Flüssigkeit an der Grenzfläche ist dann Null, und folglich auch unendlich klein relativ zu der endlichen Tangentialgeschwindigkeit innerhalb der Kugel, wie es die umgekehrte Proportionalität der Tangentialgeschwindigkeiten und Dichtigkeiten verlangt.

Haben Kugel und Flüssigkeit gleiche Dichten $Q = q$, so wird die Konfliktgeschwindigkeit (a) gleich Null, und die absolute Geschwindigkeit der Kugel 106(b) gleich derjenigen der Flüssigkeit. Die Kugel bewegt sich, als ob sie ein Teil der Flüssigkeit wäre, und das Feld bleibt das ungestörte Parallelfeld der Figur 9.

Denken wir uns zuletzt die Kugel relativ zu der Flüssigkeit unendlich schwer, also Q unendlich im Vergleiche zu q , so wird die

Konfliktgeschwindigkeit (a) der Geschwindigkeit des Parallelstromes gleich und entgegengesetzt, und die absolute Geschwindigkeit der Kugel wird gleich Null, so daß wir den durch Figur 19 dargestellten Fall haben. Der endlichen Tangentialgeschwindigkeit der Flüssigkeit entspricht, wegen der umgekehrten Proportionalität mit den Dichten, eine Tangentialgeschwindigkeit Null innerhalb der Kugel.

Die Bewegungen, welche infolge der Induktionserscheinung eintreten können, sind also zwischen die durch die Figuren 18 und 19 dargestellten Grenzfälle eingeschlossen. Wenn sich die Kugel, wie in Figur 17, mehr als dreimal so schnell als der Strom bewegt, oder wenn sie sich, wie in der Figur 20, gegen den Strom bewegt, muß folglich immer eine äußere Kraft eingreifen, und es tritt ein energetisches Feld neben dem inducierten Felde auf.

111. Einführung der Feldintensität. — Das eben betrachtete Geschwindigkeitsfeld stellt ein im ganzen Raume solenoidales Vektorfeld dar, nicht aber ein potentiellcs, wie die umgekehrte Proportionalität der Tangentialkomponenten mit den Dichtigkeiten zeigt.

Gehen wir aber jetzt, durch Multiplikation mit der Dichte Q im inneren, und mit der Dichte q im äußeren Raume, zu den Potentialen Φ und φ der Feldintensität über, so nimmt die Relation 110(c) die Gestalt

$$(a) \quad \varphi' = \Phi$$

an. Das heißt, wir kommen wieder zu demselben Resultat wie in 100: die Feldintensität erfüllt die potentielle Grenzflächenbedingung, so daß die zwei Partialfelder einander zu einem potentiellen Gesamtfelde ergänzen.

Um die expliciten Ausdrücke der Feldintensitätspotentiale zu bilden, brauchen wir nur die expliciten Ausdrücke 110(b) der Geschwindigkeitspotentiale mit q und Q zu multiplicieren und die Bezeichnungen 94(a) einzuführen. Um aber die Relationen unter den Parametern von Feldintensitätsnatur vollständiger kennen zu lernen, ziehen wir vor, von den allgemeineren Potentialausdrücken 107(b) auszugehen, nur daß wir sofort $d = 0$ setzen.

Da in diesem Falle a, b, c mit a_i, b_i, c_i identisch sind, giebt die Multiplikation dieser Potentialausdrücke mit q und Q beziehungsweise, und die Einführung der Bezeichnungen 94(a):

$$\begin{aligned} \varphi &= \bar{\alpha}(x-a) + \bar{\beta}(y-b) + \bar{\gamma}(z-c) \\ (b) \quad &- \frac{1}{2} \frac{d^3}{r^3} \left\{ (\bar{a}-\bar{\alpha})(x-a) + (\bar{b}-\bar{\beta})(y-b) + (\bar{c}-\bar{\gamma})(z-c) \right\} \end{aligned}$$

$$\bar{\Phi} = \bar{A}(x-a) + \bar{B}(y-b) + \bar{C}(z-c).$$

Unter den hier auftretenden Größen bestehen die folgenden sechs Relationen, deren man die drei ersten durch Multiplikation der Gleichungen 106 (b) mit q , die drei letzten durch Multiplikation derselben Gleichungen mit Q erhält:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{\frac{3}{2}q}{Q + \frac{1}{2}q} \bar{\alpha}, & \bar{A} &= \frac{\frac{3}{2}Q}{Q + \frac{1}{2}q} \bar{\alpha}, \\ (c) \quad \bar{b} &= \frac{\frac{3}{2}q}{Q + \frac{1}{2}q} \bar{\beta}, & \bar{B} &= \frac{\frac{3}{2}Q}{Q + \frac{1}{2}q} \bar{\beta}, \\ \bar{c} &= \frac{\frac{3}{2}q}{Q + \frac{1}{2}q} \bar{\gamma}, & \bar{C} &= \frac{\frac{3}{2}Q}{Q + \frac{1}{2}q} \bar{\gamma}, \end{aligned}$$

Wenn wir mit Hilfe dieser Relationen die Größen $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ aus den Potentialausdrücken (a) eliminieren, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \varphi &= \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{q-Q}{Q + \frac{1}{2}q} \frac{d^3}{r^3} \right\} \left\{ \bar{\alpha}(x-a) + \bar{\beta}(y-b) + \bar{\gamma}(z-c) \right\} \\ (d) \quad \bar{\Phi} &= \frac{\frac{3}{2}Q}{Q + \frac{1}{2}q} \left\{ \bar{\alpha}(x-a) + \bar{\beta}(y-b) + \bar{\gamma}(z-c) \right\}. \end{aligned}$$

Zu demselben Ausdruck gelangt man durch Multiplikation der Formeln 110 (b) mit den Dichtigkeitsfaktoren.

112. Vollständiges Potentialfeld und vollständiges Solenoidal-feld. — Das somit vorliegende potentielle Gesamtfeld läßt sich wieder in lamellärer Weise darstellen, und man gelangt leicht zu dieser Darstellung, wenn man die zu den Stromlinien der Figuren 18 und 19 orthogonalen Kurven zeichnet und sie durch die Kugel-fläche in den inneren Raum hinein fortsetzt, sofern sie überhaupt die Kugelfläche schneiden.

Um aber einen möglichst anschaulichen Vergleich der potentiellen Feldintensitäts- und der solenoidalen Geschwindigkeitsfelder zu erreichen, ziehen wir vor, beide Felder durch Pfeile darzustellen.

Setzen wir $Q = 0$, so daß die Kugel unendlich leicht ist, so liegt der Fall vor, wo die Kugel dreimal so schnell als der Parallelstrom läuft. Das Geschwindigkeitsfeld wird dann durch die Figur 26 dargestellt. In diesem Fall reducieren sich die Feldintensitätspotentiale auf

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \left\{ 1 - \frac{a^3}{r^3} \right\} \left\{ \bar{\alpha}(x-a) + \bar{\beta}(y-b) + \bar{\gamma}(z-c) \right\} \\ (a) \quad \bar{\Phi} &= 0, \end{aligned}$$

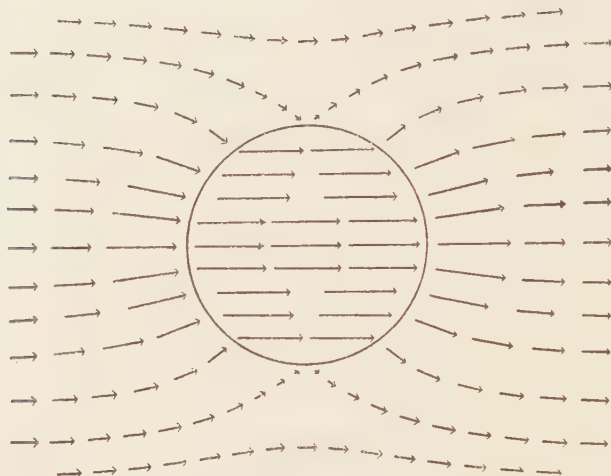


Fig. 26. Geschwindigkeitsfeld der unendlich leichten Kugel im Parallelstrome.

so daß die Feldintensität im Innern der Kugel Null und das Feld dasjenige der Figur 28 wird. Das Verschwinden der Feldintensität im inneren Raume ist unmittelbar klar, wenn die Bedeutung dieses

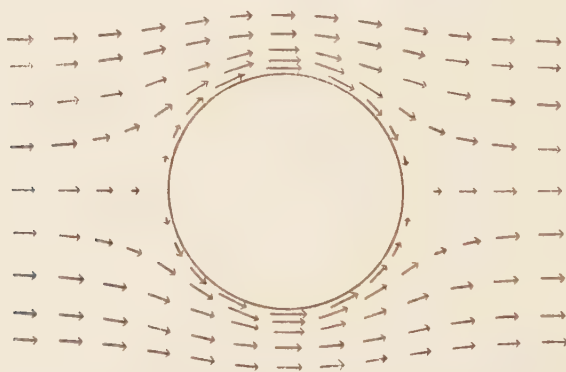


Fig. 27. Geschwindigkeitsfeld der unendlich schweren Kugel im Parallelstrome.

Vektors als Bewegungsgröße pro Volumeinheit festgehalten wird. Denn das Produkt der endlichen Geschwindigkeit in der Dichte Null giebt das Resultat Null. Zu demselben Resultat kommt man,

wenn man die dynamische Definition der Feldintensität als Impuls pro Volumeinheit zu Grunde legt. Denn wenn die Kugel verschwindend kleine Dichtigkeit, also auch verschwindend kleine Trägheit

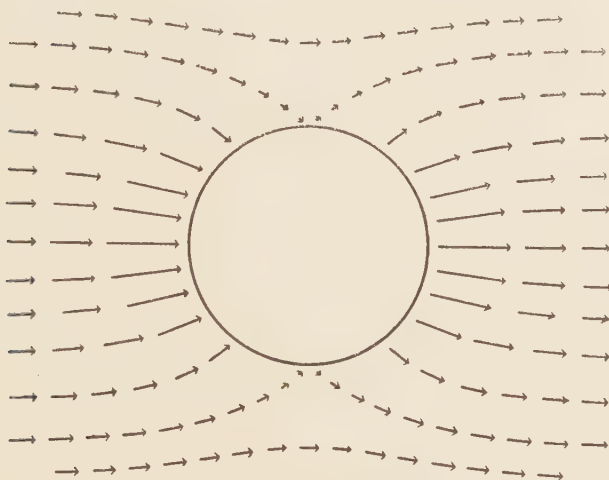


Fig. 28. Feldintensitätsfeld der unendlich leichten Kugel im Parallelstrom.

hat, so genügt ein verschwindend kleiner Impuls, um die endliche Geschwindigkeit zu erzeugen.

Haben Kugel und Flüssigkeit gleiche Dichtigkeiten, $Q = q$,

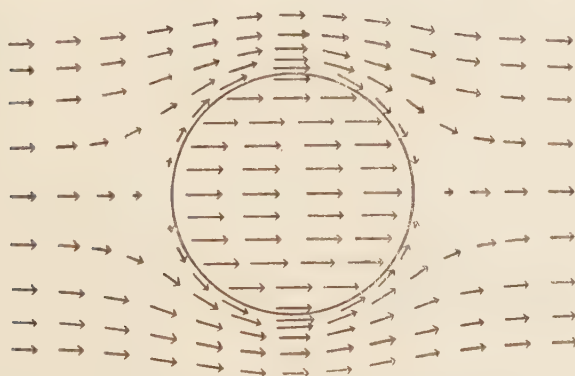


Fig. 29. Feldintensitätsfeld der unendlich schweren Kugel im Parallelstrom.

so reduziert sich das Feld der Feldintensität wie dasjenige der Geschwindigkeit auf das ungestörte Parallelfeld: Kugel und Flüssigkeit erhalten gleiche Geschwindigkeiten, und brauchen gleiche

Impulse pro Volumeinheit, um diese Geschwindigkeiten zu erreichen.

Im letzten Grenzfall endlich, wo die Dichte Q der Kugel unendlich groß ist im Verhältnis zu derjenigen der Flüssigkeit, befindet sich die Kugel in Ruhe, so daß die Geschwindigkeit innerhalb derselben gleich Null ist, wie die Figur 27 zeigt. In diesem Falle werden die Potentiale der Feldintensität:

$$\begin{aligned} \varphi &= \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d^2}{r^3}\right) \left\{ \bar{\alpha}(x-a) + \bar{\beta}(y-b) + \bar{\gamma}(z-c) \right\} \\ (b) \quad \Phi &= \frac{3}{2} \left\{ \bar{\alpha}(x-a) + \bar{\beta}(y-b) + \bar{\gamma}(z-c) \right\}. \end{aligned}$$

Wir begegnen also dem im ersten Augenblick überraschenden Resultat, daß die Bewegungsgröße pro Volumeinheit innerhalb der ruhenden Kugel einen endlichen Wert hat (Figur 29), und zwar den größten Wert, den sie überhaupt erreicht, nämlich das $\frac{3}{2}$ fache der Bewegungsgröße $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$, welche die mit der Geschwindigkeit $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ fortschreitenden Flüssigkeitsmassen im Einfallstrom haben. Dieses Sachverhältnis wird aber sofort klar, wenn man die dynamische Definition der Feldintensität als Impuls pro Volumeinheit zu Grunde legt: der ruhenden Kugel werden von seiten des Parallelstromes endliche Impulse erteilt, und zwar größere Impulse, als wenn sie kleinere Dichte hätte, und folglich den Impulsen nachgeben und sich mit dem Strome bewegen würde.

Die beiden formell gleichwertigen Beschreibungen der vorliegenden Bewegungserscheinung, einmal mit Hilfe der Geschwindigkeit und ein anderes Mal mit Hilfe der Feldintensität, lassen also wieder verschiedene Seiten des Vorganges zu Tage treten: die Beschreibung mit Hilfe der Geschwindigkeit ist wieder die anschaulichste, insofern, als sie unmittelbar den Ortsveränderungen der Kugel zu folgen gestattet; die Beschreibung mittels der Feldintensität läßt dagegen die Dynamik des Systems deutlicher hervortreten: sie läßt uns die Anstrengungen sehen, welche die Flüssigkeit seit dem Eintritt der Bewegung gemacht hat, um die eingetauchte Kugel zu bewegen.

Ebenso können wir sagen, daß die Figur 25 (S. 154) die Anstrengungen illustriert, welche die Flüssigkeit gemacht hat, um die Bewegung der fortschreitenden Kugel zu hemmen.

Die Beschreibung eines und desselben Bewegungsvorganges mit Hilfe von zwei Vektorgrößen, deren eine potentiell und die andere solenoidal ist, läßt wieder auffällige Analogieen zu elektrischen und

magnetischen Erscheinungen hervortreten, die wir später zum Gegenstand unserer Untersuchung machen werden.

113. Inducierte Aktionsschicht und inducierte Aktionsintensität.

— Die Impulse, welche die Kugel von der Flüssigkeit und die Flüssigkeit von der Kugel erleidet, werden wie im Falle der Selbstinduktion durch die Grenzfläche ausgetauscht. Die Verhältnisse sind jetzt insofern noch einfacher, als wir die totalen Impulse zu betrachten haben, da keine energetischen Impulse ausgeschieden sind. Als ein Maß für diese an der Grenzfläche stattfindende Thätigkeit kann man wieder die Differenz der normalen Feldintensitätskomponenten betrachten. Diese Differenz stellt die Dichte der fremd-inducierten Aktionsschicht auf der Oberfläche der Kugel dar.

Wenn man die Normalkomponenten in gewöhnlicher Weise aus den Potentialen 111(b) bildet, so ergibt sich als Ausdruck der Dichte dieser Schicht:

$$(a) \quad \bar{e}' = (\bar{a} - A) \frac{x' - a}{d} + (\bar{b} - B) \frac{y' - b}{d} + (\bar{c} - C) \frac{z' - c}{d}.$$

Setzt man hier die Werte von 111(c) von \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} , A , B , C ein, oder bildet man die Normalkomponenten aus den Potentialausdrücken 111(c), so findet man:

$$(a') \quad \bar{e}' = \frac{3}{2} \frac{q - Q}{Q + \frac{1}{2}q} \left\{ \bar{\alpha} \frac{x' - a}{d} + \bar{\beta} \frac{y' - b}{d} + \bar{\gamma} \frac{z' - c}{d} \right\},$$

oder endlich, wenn man mit $\bar{\sigma}$ einen Vektor mit den Komponenten $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ bezeichnet:

$$(a'') \quad \bar{e}' = \frac{3}{2} \frac{q - Q}{Q + \frac{1}{2}q} \bar{\sigma}.$$

Die Schicht ist also nach einem Kosinusetz verteilt, ändert das Vorzeichen mit der Differenz $q - Q$, und tritt als die Normalkomponente eines Vektors mit den Komponenten

$$(b) \quad \bar{f} = \bar{a} - A, \quad \bar{g} = \bar{b} - B, \quad \bar{h} = \bar{c} - C$$

oder

$$(b') \quad \bar{f} = \frac{3}{2} \frac{q - Q}{Q + \frac{1}{2}q} \bar{\alpha}, \quad \bar{g} = \frac{3}{2} \frac{q - Q}{Q + \frac{1}{2}q} \bar{\beta}, \quad \bar{h} = \frac{3}{2} \frac{q - Q}{Q + \frac{1}{2}q} \bar{\gamma}$$

auf, welchen wir die inducierte Aktionsintensität der Kugel nennen können. Dieselbe ist, wie ein Vergleich mit den Formeln 110(d) zeigt, einfach gleich der mit der Dichte q der Flüssig-

keit multiplizierten inducierten Aktionsgeschwindigkeit der Kugel.

Durch Multiplikation mit dem Volumen E der Kugel kommt man zu dem inducierten dynamischen Aktionsmoment der Kugel:

$$(c) \quad \bar{F} = \frac{3}{2} \frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q} \bar{\alpha} E, \quad \bar{G} = \frac{3}{2} \frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q} \bar{\beta} E, \quad \bar{H} = \frac{3}{2} \frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q} \bar{\gamma} E,$$

welches wieder dem mit der Dichte q multiplizierten inducierten kinematischen Aktionsmoment **110** (e) gleich ist.

Das Feld, welches wir hier betrachtet haben, verschwindet nicht im unendlich Fernen. Das Integral:

$$(d) \quad \bar{\psi} = - \int \frac{\bar{e}' d\sigma'}{4\pi r'}$$

oder die transformierte Form dieses Integrals, welches $\bar{f}, \bar{g}, \bar{h}$ enthält, stellt deshalb nicht das ganze Feld dar, sondern nur den von dem Vorhandensein der Kugel herrührenden Anteil des Feldes, nämlich im äußeren Raume:

$$- \frac{1}{2} \frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q} \frac{d^3}{r^3} \left\{ \bar{\alpha}(x-a) + \bar{\beta}(y-b) + \bar{\gamma}(z-c) \right\},$$

und im inneren Raume:

$$- \frac{1}{2} \frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q} \left\{ \bar{\alpha}(x-a) + \bar{\beta}(y-b) + \bar{\gamma}(z-c) \right\}.$$

Superponiert man auf diese durch das Integral dargestellten Felder das ursprünglich gegebene Parallelfeld

$$\bar{\alpha}(x-a) + \bar{\beta}(y-b) + \bar{\gamma}(z-c),$$

so kommt man zu dem Potentiale **111** (d) zurück.

114. Das Feldintensitätsfeld einer Kugel veränderlichen Volumens im Parallelstrom. — Wenn die in dem Parallelfeld befindliche Kugel zugleich veränderliches Volumen hat, so wird die Induktionskraft ihre allgemeinste Form haben, und beispielsweise die eigentümliche, rhythmische Bewegung einer pulsierenden Kugel erzeugen. Die Ausdrücke der inducierten Geschwindigkeiten **106** (b) sind aber dieselben, die Verallgemeinerung besteht nur in der veränderlichen Natur von Q . Da die außerdem hinzugekommene radiale Geschwindigkeit keine Tangentialkomponente an der Kugeloberfläche hat,

so schließt man unmittelbar, daß das Resultat 110 von der umgekehrten Proportionalität der Tangentialkomponenten mit den Dichtigkeiten erhalten bleibt.

Man kommt also auch nach Multiplikation mit den Dichtigkeiten zu einem im ganzen Raume potentiellen Vektorfeld. Das betreffende äußere und innere Feldintensitätspotential findet man auch einfach, wenn man den Potentialen 111 (b) die Potentiale 104 (a) superponiert. Diese Potentiale stellen die Feldintensität im Falle der allgemeinsten Fremdinduktionserscheinung im Parallelfeld dar, und wir finden also als Hauptergebnis unserer Untersuchungen in diesem Abschnitt:

Im Falle der reinen hydrodynamischen Fremdinduktionserscheinung im Parallelfeld tritt die Feldintensität als eine im ganzen Raume potentielle Vektorgröße auf.

Die Aktionsschicht wird in diesem allgemeinsten Falle das Superpositionsresultat der Schichten 104 (b) und 113 (a) sein. Die letztere Schicht, welche polarer Natur ist, wird fortwährend als die Normalkomponente des Vektors 113 (b) aufgefaßt werden können, und die Formeln 113 (c) bleiben der Ausdruck des auf der Fremdinduktion beruhenden dynamischen Aktionsmomentes der Kugel.

Fünfter Abschnitt.

Gleichzeitige Selbstinduktion und Fremdinduktion im Parallelfelde.

Anwendung auf die hydrodynamische Energiekraft.

115. Bewegte Kugel veränderlichen Volumens im Parallelströme. — Wir gehen jetzt zu dem allgemeinsten Falle der hydrodynamischen Induktion über, dessen Diskussion auf Grundlage der erreichten kinematischen und dynamischen Resultate möglich ist. Es ist dies der Fall, daß sich die Kugel unter Volumänderung und gleichzeitig unter dem Einflusse einer beliebigen Energiekraft in einem Parallelfelde bewegt.

Das Geschwindigkeitspotential innerhalb und außerhalb der Kugel wird dann wieder genau wie in 107 (b):

$$\Phi = \frac{1}{2} \frac{r^2}{a} \dot{d} + \dot{a}(x-a) + \dot{b}(y-b) + \dot{c}(z-c)$$

$$(a) \quad \varphi = \dot{a}(x-a) + \dot{\beta}(y+b) + \dot{\gamma}(z-c) - \frac{d^2}{r} \dot{d} - \frac{1}{2} \frac{d^3}{r^3} \left\{ (\dot{a}-\dot{a})(x-a) + (\dot{b}-\dot{\beta})(y-b) + (\dot{c}-\dot{\gamma})(z-c) \right\},$$

nur daß die Geschwindigkeit der Kugel hier nicht mehr durch die Bedingung beschränkt ist, daß sie ausschließlich von dem umgebenden Parallelstrome herrühren soll.

Die Induktionskraft wird dann die allgemeinste Form **90**(b) haben, deren einzelne Glieder in **96**(b') und **106**(a') entwickelt sind. Die Bewegungsgleichungen der Kugel werden ebenfalls die allgemeinste Form **91**(a) haben, und die Komponenten der inducierten Geschwindigkeit des Kugelmittelpunktes sind durch die allgemeinsten Formeln **92**(a) gegeben. Ebenso kommen die Formeln **92**(d), welche die aktuelle Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Kugel durch die energetische Geschwindigkeit und die Geschwindigkeit des Parallelstromes ausdrücken, in ihrer allgemeinsten Form

$$(b) \quad \begin{aligned} \dot{a} &= \frac{Q}{Q + \frac{1}{2}q} \dot{a}_e + \frac{\frac{3}{2}q}{Q + \frac{1}{2}q} \dot{a} \\ \dot{b} &= \frac{Q}{Q + \frac{1}{2}q} \dot{b}_e + \frac{\frac{3}{2}q}{Q + \frac{1}{2}q} \dot{\beta} \\ \dot{c} &= \frac{Q}{Q + \frac{1}{2}q} \dot{c}_e + \frac{\frac{3}{2}q}{Q + \frac{1}{2}q} \dot{\gamma} \end{aligned}$$

zur Anwendung.

Alle Resultate, die sich auf diesen allgemeinsten Fall der Induktion im Parallelfelde beziehen, lassen sich durch Superposition aus den früher gefundenen Resultaten ableiten, welche sich auf die reine Selbstinduktion in ursprünglich ruhender Flüssigkeit und auf die reine Fremdinduktion im Parallelfelde bezogen.

116. Vergleich mit der Bewegung der Kugel im leeren Raume und mit der Bewegung eines Flüssigkeitspartikelchens im inducierenden Parallelstrome. — Die Formeln **115**(b) stellen die aktuelle Geschwindigkeit der Kugel durch zwei Vergleichsgeschwindigkeiten dar. Die erste dieser Geschwindigkeiten ist die energetische, das heißt diejenige Geschwindigkeit, welche die Kugel im leeren Raume unter dem Einfluß der totalen Energiekraft angenommen haben würde. Hervorzuheben ist, daß dann in der totalen Energiekraft auch die vielleicht vorhandene hydrodynamische Energiekraft mitgerechnet

ist. Die zweite Vergleichsgeschwindigkeit ist diejenige eines Flüssigkeitspartikelchens im inducierenden Parallelstrom. Die Formeln 115 (b) sagen unmittelbar aus, daß die aktuelle Geschwindigkeit der Kugel entsteht, wenn diese Vergleichsgeschwindigkeiten nach den Sätzen 97 und 108 verkleinert oder vergrößert, und nachher einander superponiert werden.

Hat die Kugel unveränderliches Volumen, so daß die Dichte Q derselben konstant ist, so lassen sich die Gleichungen 115 (b) nach der Zeit integrieren, und wir erhalten als Gleichungen der Bahn der Kugel

$$\begin{aligned} a &= \frac{Q}{Q + \frac{1}{2}q} a_e + \frac{\frac{3}{2}q}{Q + \frac{1}{2}q} \alpha \\ (a) \quad b &= \frac{Q}{Q + \frac{1}{2}q} b_e + \frac{\frac{3}{2}q}{Q + \frac{1}{2}q} \beta \\ c &= \frac{Q}{Q + \frac{1}{2}q} c_e + \frac{\frac{3}{2}q}{Q + \frac{1}{2}q} \gamma. \end{aligned}$$

Die Koordinaten des Mittelpunktes lassen sich dann durch diejenigen Koordinaten darstellen, welche einerseits die Kugel in der Vergleichsbewegung im leeren Raume, und andererseits ein Flüssigkeitspartikelchen im inducierenden Parallelstrom hat; diese Koordinaten werden nach den Sätzen 98 und 109 verkleinert oder vergrößert und nachher einander superponiert.

Ist das Volumen der Kugel veränderlich, so wird dieses Resultat insofern modifiziert, als die Kugel bald etwas vorausgeeilt, bald etwas zurückgeblieben ist, relativ zu der Lage einer Kugel konstanten Volumens. Einen allgemeinen Überblick über die Form der Bahn wird der Satz aber immer geben, und zwar um so genauer, je kleiner die Volumveränderungen sind.

117. Geschwindigkeits- und Feldintensitätspotentiale für die inducierte Bewegung. — Wir richten jetzt unsere Aufmerksamkeit auf die Felder. Daß die früher gefundenen Resultate erhalten bleiben werden, ist ohne weiteres zu erwarten, wir ziehen jedoch vor, eine direkte Verifikation auszuführen.

Aus dem durch die Potentiale 115 (a) dargestellten Geschwindigkeitsfelde entfernen wir also die energetische Partialgeschwindigkeit, deren Potential

$$\Phi_e = \dot{a}_e(x - a) + \dot{b}_e(y - b) + \dot{c}_e(z - c)$$

ist. Die zurückbleibende Bewegung wird dann durch die Potentiale

$$\begin{aligned} \varphi &= \dot{\alpha}(x-a) + \dot{\beta}(y-b) + \dot{\gamma}(z-c) \\ (a) \quad & - \frac{d^2}{r} \dot{d} - \frac{1}{2} \frac{d^3}{r^3} \left\{ (\dot{a}-\ddot{\alpha})(x-a) + (\dot{b}-\ddot{\beta})(y-b) + (\dot{c}-\ddot{\gamma})(z-c) \right\} \\ \Phi_i &= \frac{1}{2} \frac{r^2}{d} \dot{d} + \dot{a}_i(x-a) + \dot{b}_i(y-b) + \dot{c}_i(z-c) \end{aligned}$$

dargestellt werden, wo die inducierten Geschwindigkeitskomponenten \dot{a}_i , \dot{b}_i , \dot{c}_i des Mittelpunktes der Kugel die Werte 92 (a) oder

$$(b) \quad \dot{a}_i = -\frac{q}{Q} \left(\frac{1}{2} \dot{a} - \frac{3}{2} \ddot{\alpha} \right), \quad \dot{b}_i = -\frac{q}{Q} \left(\frac{1}{2} \dot{b} - \frac{3}{2} \ddot{\beta} \right), \quad \dot{c}_i = -\frac{q}{Q} \left(\frac{1}{2} \dot{c} - \frac{3}{2} \ddot{\gamma} \right)$$

haben.

An der Oberfläche der Kugel reducieren sich die Potentiale auf

$$\begin{aligned} \varphi' &= -d \dot{d} - \left\{ \left(\frac{1}{2} \dot{a} - \frac{3}{2} \ddot{\alpha} \right) (x'-a) + \left(\frac{1}{2} \dot{b} - \frac{3}{2} \ddot{\beta} \right) (y'-b) + \left(\frac{1}{2} \dot{c} - \frac{3}{2} \ddot{\gamma} \right) (z'-c) \right\} \\ \Phi'_i &= \frac{1}{2} d \dot{d} + \dot{a}_i(x'-a) + \dot{b}_i(y'-b) + \dot{c}_i(z'-c). \end{aligned}$$

Differentiieren wir beide Ausdrücke längs einer zur Kugeloberfläche tangentiellen Richtung s , so fällt in beiden das erste Glied rechts fort, und man erhält infolge der Relationen (b)

$$(c) \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial s} : \frac{\partial \Phi'_i}{\partial s} = q : q.$$

Das heisst:

Im allgemeinsten Falle der hydrodynamischen Induktion im Parallelfelde verhalten sich die tangentiellen Komponenten der inducierten Geschwindigkeiten an der Grenzfläche umgekehrt wie die Dichtigkeiten.

Multiplizieren wir die inducierten Geschwindigkeiten mit den Dichtigkeiten, so erhalten wir folglich Vektorgrößen, die an der Grenzfläche gleich große Tangentialkomponenten haben. Da zugleich diese neue Vektorgröße, die Feldintensität, genau wie die Geschwindigkeit, potentiell in beiden Partialfeldern ist, so folgt:

Im allgemeinsten Falle der hydrodynamischen Induktion im Parallelfelde ist die Feldintensität eine im ganzen Raume potentielle Vektorgröße.

Die sich kontinuierlich aneinander schließenden Potentiale der Feldintensität werden

$$\bar{\varphi} = \bar{\alpha}(x-a) + \bar{\beta}(y-b) + \bar{\gamma}(z-c)$$

$$(d) \quad -\frac{d^2}{r} \bar{d} - \frac{1}{2} \frac{d^3}{r^3} \left\{ (\bar{\alpha} - \bar{\alpha})(x-a) + (\bar{\beta} - \bar{\beta})(y-b) + (\bar{\gamma} - \bar{\gamma})(z-c) \right\}$$

$$\bar{\Phi} = -d \bar{d} + \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{d} \bar{D} - d \bar{D} \right) + \bar{A}(x-a) + \bar{B}(y-b) + \bar{C}(z-c).$$

Die Kontinuität dieser Potentiale an der Grenzfläche erkennt man sofort, wenn man sich der die Relationen (b) vertretenden Relationen **94** (b), nämlich

$$(e) \quad \bar{A} = -\frac{1}{2} \bar{\alpha} + \frac{3}{2} \bar{\alpha}, \quad \bar{B} = -\frac{1}{2} \bar{\beta} + \frac{3}{2} \bar{\beta}, \quad \bar{C} = -\frac{1}{2} \bar{\gamma} + \frac{3}{2} \bar{\gamma}$$

erinnert.

118. Aktionsschicht, Aktionsintensität und Aktionsmoment. — Mit Hilfe der eben aufgeschriebenen Potentiale der hydrodynamischen Feldintensität können wir den allgemeinsten Ausdruck der Aktionsschicht aufstellen, und zu den damit verwandten Vektorgrößen, der Aktionsintensität und dem dynamischen Aktionsmoment übergehen.

Bildet man in gewöhnlicher Weise aus den Potentialen die Normalkomponenten außerhalb und innerhalb der Kugelfläche, und zieht die letzteren von den ersteren ab, so erhält man als allgemeinsten Ausdruck der Dichte der Aktionsschicht

$$(a) \quad \bar{e}' = \bar{d} - \bar{D} + (\bar{\alpha} - \bar{A}) \frac{x' - a}{d} + (\bar{\beta} - \bar{B}) \frac{y' - b}{d} + (\bar{\gamma} - \bar{C}) \frac{z' - c}{d}.$$

Dieser Ausdruck stimmt mit denjenigen der Formeln **105** (b) und **113** (a) überein, nur das jetzt $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ und $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ allgemeinere Bedeutung als in jenen Formeln haben. Mit Hilfe der Formeln **117** (e) reduziert sich der Ausdruck der Dichte der Aktionsschicht auf

$$(a') \quad \bar{e}' = \bar{d} - \bar{D} + \frac{3}{2} \left\{ (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}) \frac{x' - a}{d} + (\bar{\beta} - \bar{\beta}) \frac{y' - b}{d} + (\bar{\gamma} - \bar{\gamma}) \frac{z' - c}{d} \right\}.$$

Zu dieser Flächendivergenz auf der Kugelfläche kommt noch die kubische Divergenz im Innern der Kugel:

$$(b) \quad \nabla^2 \bar{\Phi} = 3 \frac{\bar{D}}{d} = \bar{e}.$$

Mit Hilfe dieser Divergenzen auf der Grenzfläche und im Innern der Kugel kann man wieder durch ein Integral von der Form **11** (a) das Potential der Feldintensität desjenigen Feldes ausdrücken, welches

auf dem Vorhandensein und der Bewegung der Kugel beruht, während das Potential des nicht durch die Kugel erzeugten Parallelstromes durch ähnliche Integrale über die entfernten Kugeln, von welchen dieser Strom ausgeht, auszudrücken wäre.

Die Aktionsschicht ist aus zwei einfachen Schichten zusammengesetzt. Die erste Partialschicht beruht auf der Expansionsbewegung der Kugel und hat die in allen Punkten der Kugelfläche gleiche Dichte $\bar{d} - \bar{D}$. Die zweite Partialschicht beruht auf der translatorischen Bewegung der Kugel relativ zu dem Parallelstrome und ist, wie in den früheren Specialfällen, nach einem Kosinusetze verteilt. Deshalb wird, wenn wir sämtliche Flächendivergenzen und kubischen Divergenzen summieren, diese letztere Schicht keinen Beitrag zu der Summe geben. Das Resultat der Summation wird die in 104(d) berechnete GröÙe \bar{E} , das Volumänderungsmoment, werden. Als Definition dieser GröÙe können wir also auch im allgemeinsten Falle das Integral 104(d) beibehalten, und das Volumänderungsmoment bleibt nach dem Satze 104(A) gleich dem Produkte der Volumausdehnungsgeschwindigkeit in die Dichte der Flüssigkeit.

Der Teil der Schicht (a), welcher keinen Beitrag zu dem Volumänderungsmomente liefert, ist die Normalkomponente eines Vektors:

$$(c) \quad \bar{f} = \bar{a} - \bar{A}, \quad \bar{g} = \bar{b} - \bar{B}, \quad \bar{h} = \bar{c} - \bar{C},$$

oder

$$(c') \quad \bar{f} = \frac{3}{2}(\bar{a} - \bar{\alpha}), \quad \bar{g} = \frac{3}{2}(\bar{b} - \bar{\beta}), \quad \bar{h} = \frac{3}{2}(\bar{c} - \bar{\gamma}).$$

Diese Gleichungen geben die allgemeinste Definition der Aktionsintensität der Kugel. Ein Vergleich mit der früher durch rein kinematische Betrachtungen definierten Aktionsgeschwindigkeit 68(b) zeigt, daß wir genau wie in den früheren Specialfällen 103 und 113 zu dem folgenden einfachen Resultat kommen:

Die Aktionsintensität der Kugel ist die mit der Dichte der Flüssigkeit multiplizierte Aktionsgeschwindigkeit.

Durch Multiplikation mit dem Volumen E der Kugel bilden wir das dynamische Aktionsmoment

$$(d) \quad \bar{F} = \frac{3}{2}(\bar{a} - \bar{\alpha})E, \quad \bar{G} = \frac{3}{2}(\bar{b} - \bar{\beta})E, \quad \bar{H} = \frac{3}{2}(\bar{c} - \bar{\gamma})E.$$

Der Vergleich mit dem früher definierten kinematischen Aktionsmomente zeigt, daß wir wieder wie früher das Resultat finden:

Das dynamische Aktionsmoment der Kugel ist das Produkt des kinematischen Aktionsmomentes in die Dichte der Flüssigkeit.

119. Anwendung auf die hydrodynamische Energiekraft. — Die somit erreichten Resultate sind besonders deshalb wichtig, weil im Ausdruck der hydrodynamischen Energiekraft 90(c) eben die Produkte der Volumänderungsgeschwindigkeit und der kinematischen Aktionsmomente in die Dichte der Flüssigkeit vorkommen. Den Ausdruck dieser Kraft können wir deshalb jetzt

$$\begin{aligned} X_e &= -\bar{E} \dot{\alpha} - \{\dot{\alpha}_\alpha \bar{F} + \dot{\alpha}_\beta \bar{G} + \dot{\alpha}_\gamma \bar{H}\} \\ (a) \quad Y_e &= -\bar{E} \dot{\beta} - \{\dot{\beta}_\alpha \bar{F} + \dot{\beta}_\beta \bar{G} + \dot{\beta}_\gamma \bar{H}\} \\ Z_e &= -\bar{E} \dot{\gamma} - \{\dot{\gamma}_\alpha \bar{F} + \dot{\gamma}_\beta \bar{G} + \dot{\gamma}_\gamma \bar{H}\} \end{aligned}$$

schreiben. Die hier als Parameter auftretenden Größen \bar{E} , \bar{F} , \bar{G} , \bar{H} sind jetzt dynamisch definiert, wodurch wir eine bessere Grundlage für die Diskussion dieser Kraft gewonnen haben.

Allerdings haben wir oben diese Definitionen explicite nur für den Fall entwickelt, daß sich die Kugel in einem Parallelstrom bewegt, während die hydrodynamische Energiekraft (a) erst in einem zusammengesetzten Parallel- und Deformationsstrom zu voller Entwicklung kommt. Die hydrodynamische Induktionskraft 90(b) bleibt aber ganz unverändert, sei es, daß außer dem Parallelstrom noch Deformationsströme aller möglichen Ordnungen vorhanden sind, so daß die dynamische Grundlage der Definitionen bestehen bleibt.

120. Permanente und temporäre Geschwindigkeit der Kugel. — Für die eingehende Diskussion der hydrodynamischen Energiekraft ist es wichtig, zu beachten, daß im allgemeinen zwei verschiedene dynamische Prozesse zur Bildung der Größen \bar{F} , \bar{G} , \bar{H} beitragen. Bei dem einen Prozeß ist eine Energiekraft, bei dem anderen eine fremdinducierende Kraft die primäre Bewegungsursache. In den Abschnitten über Selbstinduktion und Fremdinduktion sahen wir diese Prozesse getrennt auftreten. Jetzt wirken die Kräfte gleichzeitig, und die Beiträge, welche jede derselben zu den Größen \bar{F} , \bar{G} , \bar{H} liefert, lassen sich eindeutig angeben, so daß wir eine eindeutige Zerlegung dieser Größen, und damit eine Zerlegung der Energiekraft in Partialkräfte mit ganz verschiedenen Eigenschaften erreichen.

Für die in die Ausdrücke von \bar{F} , \bar{G} , \bar{H} eingehenden aktuellen Geschwindigkeitskomponenten \dot{a} , \dot{b} , \dot{c} der Kugel ist diese Zerlegung schon in den Formeln 115(b) gegeben. Auf der rechten Seite stehen zwei Partialgeschwindigkeiten, von denen die eine der energetischen

Geschwindigkeit der Kugel, die andere der Geschwindigkeit des induzierenden Parallelstromes proportional ist. Die erste dieser Geschwindigkeiten wird der Kugel gewissermaßen in intimerer Weise angehören als die zweite. Die zweite ist sozusagen nur eine Geschwindigkeit, welche die Kugel interimistisch von der Flüssigkeit geborgt hat: die Kugel wird sie haben, wenn ein induzierender Parallelstrom da ist, und sie sofort wieder verlieren, wenn die Bewegung des Parallelstromes aufhört. Die energetische Geschwindigkeit wird dagegen der Kugel von seiten der Flüssigkeit nicht momentan mitgeteilt oder entzogen werden können. Sie kann in intimster Weise der Kugel selbst angehören, z. B. wenn die Bewegung derselben auf inneren elastischen Kräften beruht.

Mit Rücksicht hierauf werden wir die erste Partialgeschwindigkeit in 115 (b) die permanente, die zweite die temporäre Partialgeschwindigkeit der Kugel nennen. Wir schreiben dann

$$(a) \quad \dot{a} = \dot{a}_p + \dot{a}_t, \quad \dot{b} = \dot{b}_p + \dot{b}_t, \quad \dot{c} = \dot{c}_p + \dot{c}_t,$$

wo die permanente Geschwindigkeit durch

$$(b) \quad \dot{a}_p = \frac{Q}{Q + \frac{1}{2}q} \dot{a}_e, \quad \dot{b}_p = \frac{Q}{Q + \frac{1}{2}q} \dot{b}_e, \quad \dot{c}_p = \frac{Q}{Q + \frac{1}{2}q} \dot{c}_e,$$

und die temporäre Geschwindigkeit durch

$$(c) \quad \dot{a}_t = \frac{\frac{3}{2}q}{Q + \frac{1}{2}q} \dot{\alpha}, \quad \dot{b}_t = \frac{\frac{3}{2}q}{Q + \frac{1}{2}q} \dot{\beta}, \quad \dot{c}_t = \frac{\frac{3}{2}q}{Q + \frac{1}{2}q} \dot{\gamma}$$

gegeben sind:

(A) *Die permanente Partialgeschwindigkeit der Kugel ist gleich ihrer mit dem Hemmungsverhältnisse multiplizierten energetischen Geschwindigkeit.*

(B) *Die temporäre Partialgeschwindigkeit der Kugel ist gleich der mit dem Koeffizienten der fremdinduzierten Geschwindigkeit multiplizierten Geschwindigkeit des Einfallstromes.*

Wenn die reine Selbstinduktionserscheinung vorliegt, das heißt, wenn $\dot{\alpha} = \dot{\beta} = \dot{\gamma} = 0$, wird die permanente Geschwindigkeit mit der aktuellen identisch. Die Formeln (b) reducieren sich dann auf die im Abschnitt über die Selbstinduktion diskutierten Formeln 96 (e). Wenn die Erscheinung der reinen Fremdinduktion vorliegt, das heißt, wenn $\dot{a}_e = \dot{b}_e = \dot{c}_e = 0$, wird die temporäre Geschwindigkeit mit der aktuellen identisch, und die Formeln (c) reducieren sich auf die im Abschnitt über die Fremdinduktion diskutierten Formeln 106 (b).

121. Permanentes und temporäres Aktionsmoment. — Der allgemeine Ausdruck des kinematischen Aktionsmomentes war nach 68 (c')

$$\dot{F} = \frac{3}{2}(\dot{a} - \dot{\alpha})E, \quad \dot{G} = \frac{3}{2}(\dot{b} - \dot{\beta})E, \quad \dot{H} = \frac{3}{2}(\dot{c} - \dot{\gamma})E.$$

Wenn wir hier 120 (a) einsetzen, werden sich \dot{F} , \dot{G} , \dot{H} in einen nur von der energetischen Geschwindigkeit, und einen nur von der Geschwindigkeit des induzierenden Parallelstromes abhängigen Teil zerlegen. Den ersten werden wir als das permanente, den zweiten als das temporäre Aktionsmoment bezeichnen:

$$(a) \quad \dot{F} = \dot{F}_p + \dot{F}_t, \quad \dot{G} = \dot{G}_p + \dot{G}_t, \quad \dot{H} = \dot{H}_p + \dot{H}_t,$$

wo also

$$(b) \quad \dot{F}_p = \frac{3}{2}\dot{a}_p E, \quad \dot{G}_p = \frac{3}{2}\dot{b}_p E, \quad \dot{H}_p = \frac{3}{2}\dot{c}_p E,$$

und

$$(c) \quad \dot{F}_t = \frac{3}{2}(\dot{a}_t - \dot{\alpha})E, \quad \dot{G}_t = \frac{3}{2}(\dot{b}_t - \dot{\beta})E, \quad \dot{H}_t = \frac{3}{2}(\dot{c}_t - \dot{\gamma})E.$$

Die durch (b) definierten \dot{F}_p , \dot{G}_p , \dot{H}_p hängen hier nur von \dot{a}_e , \dot{b}_e , \dot{c}_e , die durch (c) definierten \dot{F}_t , \dot{G}_t , \dot{H}_t nur von $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ ab. Für die letzteren finden wir durch Einführung von 120 (c) die Ausdrücke

$$(c') \quad \dot{F}_t = \frac{3}{2}\frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q}\dot{\alpha}E, \quad \dot{G}_t = \frac{3}{2}\frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q}\dot{\beta}E, \quad \dot{H}_t = \frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q}\dot{\gamma}E.$$

Durch Multiplikation mit der Dichtigkeit q der Flüssigkeit kommen wir zu entsprechenden Formeln für die dynamischen Aktionsmomente:

$$(d) \quad \bar{F} = \bar{F}_p + \bar{F}_t, \quad \bar{G} = \bar{G}_p + \bar{G}_t, \quad \bar{H} = \bar{H}_p + \bar{H}_t,$$

wo

$$(e) \quad \bar{F}_p = \frac{3}{2}q\dot{a}_p E, \quad \bar{G}_p = \frac{3}{2}q\dot{b}_p E, \quad \bar{H}_p = \frac{3}{2}q\dot{c}_p E$$

und

$$(f) \quad \bar{F}_t = \frac{3}{2}q\frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q}\dot{\alpha}E, \quad \bar{G}_t = \frac{3}{2}q\frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q}\dot{\beta}E, \quad \bar{H}_t = \frac{3}{2}q\frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q}\dot{\gamma}E.$$

Wenn kein induzierender Parallelstrom da ist, wird das permanente Aktionsmoment, wie man sich leicht überzeugt, mit dem im Falle der reinen Selbstinduktionerscheinung studierten Aktionsmoment identisch (103). Wenn andererseits keine energetische, also auch keine permanente Geschwindigkeit vorliegt, wird das temporäre

Aktionsmoment (f) mit dem im Falle der reinen Fremdinduktion studierten Aktionsmoment identisch (113).

In ähnlicher Weise wie wir die Aktionsmomente zerlegt haben, können wir auch die Aktionsgeschwindigkeiten, die Aktionsintensitäten und die Aktionsschichten in ihre permanenten und ihre temporären Bestandteile zerlegen. Die in Frage kommenden Ausdrücke haben wir schon alle getrennt studiert, die permanenten im Abschnitte über die Selbstinduktion, die temporären im Abschnitte über die Fremdinduktion.

122. Permanente und temporäre Energiekraft. — Nach dieser Zerlegung des Aktionsmomentes zerfällt die hydrodynamische Energiekraft von selbst in eine permanente und eine temporäre Partialkraft:

$$\begin{aligned} X_e &= X_{pe} + X_{te} \\ (a) \quad Y_e &= Y_{pe} + Y_{te} \\ Z_e &= Z_{pe} + Z_{te}. \end{aligned}$$

Die permanente Energiekraft hat dann die Komponenten

$$\begin{aligned} X_{pe} &= -\dot{\alpha} \bar{E} - \{\dot{\alpha}_\alpha \bar{F}_p + \dot{\alpha}_\beta \bar{G}_p + \dot{\alpha}_\gamma \bar{H}_p\} \\ (b) \quad Y_{pe} &= -\dot{\beta} \bar{E} - \{\dot{\beta}_\alpha \bar{F}_p + \dot{\beta}_\beta \bar{G}_p + \dot{\beta}_\gamma \bar{H}_p\} \\ Z_{pe} &= -\dot{\gamma} \bar{E} - \{\dot{\gamma}_\alpha \bar{F}_p + \dot{\gamma}_\beta \bar{G}_p + \dot{\gamma}_\gamma \bar{H}_p\}. \end{aligned}$$

Die hier auftretenden Parameter \bar{E} , \bar{F}_p , \bar{G}_p , \bar{H}_p können alle als der Kugel selbst angehörende Parameter aufgefaßt werden, beispielsweise in der Weise, daß sie alle Bewegungen der Kugel beschreiben, die auf inneren elastischen Schwingungen derselben beruhen.

Die temporäre Energiekraft hat die Komponenten

$$\begin{aligned} X_{te} &= -\{\dot{\alpha}_\alpha \bar{F}_t + \dot{\alpha}_\beta \bar{G}_t + \dot{\alpha}_\gamma \bar{H}_t\} \\ (c) \quad Y_{te} &= -\{\dot{\beta}_\alpha \bar{F}_t + \dot{\beta}_\beta \bar{G}_t + \dot{\beta}_\gamma \bar{H}_t\} \\ Z_{te} &= -\{\dot{\gamma}_\alpha \bar{F}_t + \dot{\gamma}_\beta \bar{G}_t + \dot{\gamma}_\gamma \bar{H}_t\}. \end{aligned}$$

Die hier auftretenden Parameter \bar{F}_t , \bar{G}_t , \bar{H}_t beschreiben Bewegungen, welche die Flüssigkeit in der Kugel induciert hat. Durch Einsetzen der Werte 121 (f) derselben ergeben sich

$$X_{te} = -\frac{3}{2}q \frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q} E \left\{ \dot{\alpha}_a \dot{\alpha} + \dot{\alpha}_\beta \dot{\beta} + \dot{\alpha}_\gamma \dot{\gamma} \right\}$$

$$(c') \quad Y_{te} = -\frac{3}{2}q \frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q} E \left\{ \dot{\beta}_a \dot{\alpha} + \dot{\beta}_\beta \dot{\beta} + \dot{\beta}_\gamma \dot{\gamma} \right\}$$

$$Z_{te} = -\frac{3}{2}q \frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q} E \left\{ \dot{\gamma}_a \dot{\alpha} + \dot{\gamma}_\beta \dot{\beta} + \dot{\gamma}_\gamma \dot{\gamma} \right\}$$

als entwickelte Ausdrücke für die Komponenten der temporären Energiekraft.

Sechster Abschnitt.

Allgemeine Sätze über den relativen Einfluss der Induktionskraft und der Energiekraft auf die Bewegung der Kugel.

123. Impulsive Bewegung. — Die Eigenschaften der hydrodynamischen Energiekraft, welche jetzt mehr und mehr in den Vordergrund der Diskussion treten wird, unterscheiden sich in vielen Beziehungen bedeutend von denjenigen der Induktionskraft. Diesen Unterschied können wir sofort durch die Betrachtung einiger besonderer Bewegungsformen zeigen.

Es sei die Bewegung zunächst eine durch Stofskräfte erzeugte impulsive Bewegung. Während der sehr kurzen Stofszeit darf die Konfiguration und Lage des Systems nur verschwindend kleine Veränderungen erleiden, während gleichzeitig die Geschwindigkeiten sich um endliche Größen verändern. Während dieser Zeit müssen dann die Beschleunigungen sehr groß sein, während die Geschwindigkeiten immer endliche Größen bleiben.

Ist eine solche Bewegung gegeben, und führt man im Ausdrucke der Induktionskraft die Differentiationen nach der Zeit aus, so findet man, wie wir schon gesehen haben, teils Glieder, welche von den Beschleunigungskomponenten \ddot{a} , \ddot{b} , \ddot{c} der Kugel, und denjenigen $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ des äußeren Stromes abhängen und somit sehr groß werden, teils auch Glieder, die Produkte der Volumenausdehnungsgeschwindigkeit \dot{E} in die linearen Geschwindigkeitskomponenten \dot{a} , \dot{b} , \dot{c} der Kugel und $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ des Stromes sind. Da nur die großen Glieder während der kurzen Stofszeit einen merkbaren Einfluss auf die Be-

wegung der Kugel ausüben können, wird es also gestattet sein, während dieser Zeit 90(b) durch

$$\begin{aligned} X_i &= -q E\left(\frac{1}{2}\ddot{\alpha} - \frac{3}{2}\dot{\alpha}\right) \\ (a) \quad Y_i &= -q E\left(\frac{1}{2}\ddot{\beta} - \frac{3}{2}\dot{\beta}\right) \\ Z_i &= -q E\left(\frac{1}{2}\ddot{\gamma} - \frac{3}{2}\dot{\gamma}\right) \end{aligned}$$

zu ersetzen.

Im Ausdrucke der Energiekraft 90(c) treten nur Produkte der immer endlichen Geschwindigkeitskomponenten auf. Im ersten Gliede steht das Produkt von Volumausdehnungsgeschwindigkeit \dot{E} und translatorischer Geschwindigkeit ($\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$) des äußeren Parallelstromes. Im zweiten Gliede finden sich die Produkte der im Aktionsmomente enthaltenen Geschwindigkeitskomponenten in die Komponenten der Deformationsgeschwindigkeit des äußeren Stromes. Die in der Energiekraft enthaltenen Glieder sind also von derselben Größenordnung, wie die im Ausdrucke (a) der Induktionskraft vernachlässigten, und wir schließen:

Während des impulsiven Bewegungszustandes kann die Energiekraft im Vergleich zu der Induktionskraft vernachlässigt werden.

Gleichzeitig können wir während der Stofszeit, je nachdem es sich zweckmäßig zeigt, den Ausdruck der Induktionskraft in der exakten Form 90(b) oder der angenäherten Form (a) schreiben. Übrigens wird auch die letztere Form exakt sein, wenn das Volumen der Kugel unveränderlich ist.

124. Schwingungen mit kleinen Amplituden. — Im Falle einer schwingenden Bewegung ist sowohl die Geschwindigkeit als die Beschleunigung der Amplitude proportional. Das in 123(a) entwickelte Hauptglied der Induktionskraft ist eine lineäre Funktion der Beschleunigungskomponenten der Kugel und des Parallelstromes, und ist somit der ersten Potenz der Amplitude proportional. Die bei dieser Entwicklung vernachlässigten Glieder der Induktionskraft und sämtliche Glieder der Energiekraft enthalten aber Produkte der Geschwindigkeitskomponenten, sind also dem Produkte zweier Schwingungsamplituden proportional. Es genügt deshalb, die Amplituden klein zu wählen, um zu erreichen, daß die Energiekraft im Vergleich zu der Induktionskraft schwach wird. Die Kleinheit ist dabei selbstverständlich relativ aufzufassen: die Längen der Amplituden müssen klein sein im Vergleich zu allen anderen im Ausdrucke

der Energiekraft auftretenden Längen. Von solchen Längen kommt nur eine vor, nämlich der Radius d der Kugel, welcher in das Volumen E , und dadurch implicite in die Parameter \bar{E} , \bar{F} , \bar{G} , \bar{H} eingeht. Die Schwingungsamplituden müssen also relativ zu den Kugelradien klein sein; das war aber die Definitionseigenschaft der verborgenen Schwingungen (41), so daß wir den folgenden, für die Dynamik der verborgenen Bewegungen äußerst wichtigen Satz finden:

Im Falle einer schwingenden Bewegung, bei welcher die Amplituden klein sind im Vergleiche zu dem Radius der Kugel, verhält sich die Intensität der Induktionskraft zu derjenigen der Energiekraft wie eine endliche GröÙe zu einer kleinen GröÙe erster Ordnung.

Es tritt also eine auffallende Verwandtschaft zwischen der schwingenden Bewegung mit kleinen Amplituden und der impulsiven Bewegung auf, eine Verwandtschaft, welche offenbar darauf beruht, daß die schwingende Bewegung als eine periodisch wiederholte impulsive Bewegung aufgefaßt werden kann. Die Bedingung, daß während der Stoßzeit keine wesentliche Konfigurationsveränderung eintreten darf, bleibt erfüllt, solange man die Bedingung von der Kleinheit der Amplituden relativ zum Kugelradius festhält.

Durch diese Analogie muß man sich aber nicht verleiten lassen, die Energiekraft im Falle kleiner Schwingungen ohne weiteres zu vernachlässigen, und die Induktionskraft in der Form 123 (a) zu schreiben. Während der Stoßzeit wird dieses gestattet sein, weil die schwächsten Kraftglieder dabei nicht Zeit haben, merkliche Bewegungen zu erzeugen. Jetzt haben wir es aber mit einem andauernden Bewegungszustande zu thun, während dessen auch kleine Kräfte große Wirkungen haben können.

125. Mittelwert der Induktionskraft im Falle periodischer Bewegungen. — Die Wichtigkeit der letzten Bemerkung wird sofort hervortreten, wenn wir die Mittelwerte der Kräfte bei periodischen Bewegungen suchen. Die periodische Bewegung denken wir uns zunächst allgemeinsten Natur, so daß sie nur dadurch definiert ist, daß das System periodisch dieselben Lagen mit denselben Geschwindigkeiten durchläuft. Diese Bewegung wird dann auch eine schwingende sein können, mit großen oder mit kleinen Amplituden.

Sämtliche Parameter des Systems, sowie ihre Ableitungen nach der Zeit müssen dann periodische Funktionen der Zeit mit gleicher Periode sein. Die unter dem Zeichen $\frac{d}{dt}$ im Ausdruck der

Induktionskraft auftretenden Verbindungen solcher Funktionen werden dann auch Funktionen der Zeit mit derselben Periode. Wir können daher den Satz 21 (A) zur Verwendung bringen und schließen:

Im Falle periodischer Bewegungen hat die hydrodynamische Induktionskraft den Mittelwert Null.

Wenden wir diesen Satz auf den Fall von Schwingungen mit kleinen Amplituden an, so zeigt es sich, daß die Induktionskraft nur in den inneren Verlauf der Schwingungen eingreift; und hier kann sie als allein wirkend aufgefaßt werden, da sich die schwache Energiekraft neben ihr nicht geltend machen kann. Aber andererseits wird diese an Intensität bei weitem überwiegende Induktionskraft keine Tendenz zur Erzeugung dauernder Bewegungen in bestimmter Richtung haben. Solche werden nur von der viel schwächeren Energiekraft erzeugt werden können.

126. Mittelwert der Energiekraft im Falle synchroner Schwingungen. — Auch die Energiekraft wird periodischen Schwankungen unterworfen sein, wenn eine periodische Bewegung des Systems vorliegt. Im allgemeinen wird dabei sowohl die Richtung als die Intensität veränderlich sein, so daß ihre Richtungslinie einen Kegel im Raume beschreibt. Nehmen wir aber den Mittelwert während einer Periode, so werden wir meistens nicht den Wert Null erhalten, obschon in vielen Fällen die an sich großen Glieder im Mittel ausfallen.

Es gibt aber besonders einen Fall, wo die Energiekraft nicht nur einen von Null verschiedenen Mittelwert hat, sondern wo sie als eine an Vorzeichen und Richtung unveränderliche, und nur an Intensität periodisch schwankende Kraft auftritt. Es ist dies der Fall der synchronen Schwingungen.

Die synchronen Schwingungen des ganzen Kugelsystems waren dadurch definiert, daß alle geometrischen Parameter proportional derselben Funktion der Zeit, $f(t)$, waren, und folglich alle kinematischen Parameter proportional der Zeitableitung dieser Funktion, $f'(t)$ (46). Die Bewegung der Flüssigkeitspartikelchen bestand dann in kleinen Schwingungen längs eines festliegenden Systems von Stromlinien. In dem vorliegenden Falle, wo wir nur die Bewegung einer Kugel und der umgebenden Flüssigkeit betrachten, werden also die Bedingungen darin bestehen, daß im Einfallsstrome die Schwingungen längs eines festen Systems von Stromlinien verlaufen, und daß die Schwingungen der Kugel mit denjenigen des Einfallsstromes syn-

chron sind. Mathematisch drückt sich dies dadurch aus, daß die Parameter \bar{E} , \bar{F} , \bar{G} , \bar{H} , $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$, $\dot{\alpha}_a$, $\dot{\alpha}_\beta$, $\dot{\alpha}_\gamma$, $\dot{\beta}_a$, \dots proportional derselben Funktion der Zeit, $f(t)$, sind.

Hat diese Funktion, wie wir es bei früheren Gelegenheiten vorausgesetzt haben, den quadratischen Mittelwert Eins in der Periode, so können wir als Bedingungen für den synchronen Schwingungszustand die Gleichungen

$$(a) \quad \begin{array}{lll} \bar{E} = \bar{E}_m \cdot f(t) & \dot{\alpha} = \dot{\alpha}_m \cdot f(t) & \dot{\alpha}_a = \dot{\alpha}_a^m \cdot f(t) \\ \bar{F} = \bar{F}_m \cdot f(t) & \dot{\beta} = \dot{\beta}_m \cdot f(t) & \dot{\beta}_\beta = \dot{\beta}_\beta^m \cdot f(t) \\ \bar{G} = \bar{G}_m \cdot f(t) & \dot{\gamma} = \dot{\gamma}_m \cdot f(t) & \dot{\gamma}_\gamma = \dot{\gamma}_\gamma^m \cdot f(t) \\ \bar{H} = \bar{H}_m \cdot f(t) & & \dots \end{array}$$

aufstellen, wo \bar{E}_m , \bar{F}_m , \dots $\dot{\alpha}_m$, \dots die nach **21** definierten und mit Vorzeichen versehenen quadratischen Mittelwerte sind. Substituiert man die Werte (a) in den Ausdruck **119**(a) der Energiekraft, so ergibt sich:

$$(b) \quad X_e = [f(t)]^2 \cdot X_e^0, \quad Y_e = [f(t)]^2 \cdot Y_e^0, \quad Z_e = [f(t)]^2 \cdot Z_e^0,$$

wo X_e^0 , Y_e^0 , Z_e^0 die von der Zeit unabhängigen Größen

$$(c) \quad \begin{array}{l} X_e^0 = -\dot{\alpha}_m \bar{E}_m - \{\dot{\alpha}_a^m \bar{F}_m + \dot{\alpha}_\beta^m \bar{G}_m + \dot{\alpha}_\gamma^m \bar{H}_m\} \\ Y_e^0 = -\dot{\beta}_m \bar{E}_m - \{\dot{\beta}_a^m \bar{F}_m + \dot{\beta}_\beta^m \bar{G}_m + \dot{\beta}_\gamma^m \bar{H}_m\} \\ Z_e^0 = -\dot{\gamma}_m \bar{E}_m - \{\dot{\gamma}_a^m \bar{F}_m + \dot{\gamma}_\beta^m \bar{G}_m + \dot{\gamma}_\gamma^m \bar{H}_m\} \end{array}$$

sind.

Die Energiekraft (b) wird also hier eine an Vorzeichen unveränderliche Größe sein; nur hat sie immer noch eine Intensität, welche sich proportional der immer positiven periodischen Funktion $[f(t)]^2$ verändert. Nehmen wir den linearen Mittelwert von (b), so kommen wir, weil $f(t)$ den quadratischen Mittelwert Eins hat, zu den Formeln (c). Diese Formeln stellen also die Energiekraft im Falle von synchronen Schwingungen dar, wenn wir von Einzelheiten absehen und nur nach den durchschnittlichen Resultaten fragen.

Die Formeln (c) sind den Formeln für die aktuelle Energiekraft **119**(a) vollkommen analog, nur sind die rechts auftretenden, von der Zeit abhängigen Größen durch die von der Zeit unabhängigen, aber mit Vorzeichen versehenen quadratischen Mittelwerte ersetzt worden. Der Übergang von der aktuellen Energiekraft zu

ihrem Mittelwert im Falle des synchronen Schwingungszustandes ist also dem Übergange von dem Potential der aktuellen Bewegung zu dem Potential des synchronen Schwingungszustandes vollkommen analog (46). Es ist deshalb nie notwendig, neue Formeln für den Fall dieses Schwingungszustandes aufzustellen, sondern wir können immer die Formeln für die aktuelle Energiekraft benutzen, und durch den folgenden Satz die Resultate für den betrachteten Fall ableiten:

Im Falle synchroner Schwingungen ist die hydrodynamische Energiekraft an Richtung unveränderlich und ihr Mittelwert kann durch die Formeln für die aktuelle Energiekraft dargestellt werden, nur daß man die Symbole \bar{E} , \bar{F} , \bar{G} , \bar{H} , $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$, $\dot{\alpha}_\alpha$, $\dot{\alpha}_\beta$, ... als quadratische Mittelwerte auffaßt.

127. Die permanente Energiekraft im Falle synchroner oder nicht synchroner Sinusschwingungen. — Schon bei diesen Betrachtungen der hydrodynamischen Energiekraft als Funktion nur der Zeit tritt die Wichtigkeit der Zerlegung der totalen Energiekraft in die permanente und die temporäre Partialkraft hervor. Denn da die temporären Aktionsmomente \bar{F}_t , \bar{G}_t , \bar{H}_t nach 121 (f) den Geschwindigkeitskomponenten $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ im Einfallsstrome proportional sind, werden die Bedingungen des Synchronismus schon von selbst erfüllt sein, sofern nur die Bewegung im Einfallsstrome in Schwingungen längs eines festliegenden Systems von Stromlinien besteht. Ganz anders verhält es sich dagegen mit der permanenten Energiekraft, wo \bar{E} , \bar{F}_p , \bar{G}_p , \bar{H}_p als Größen auftreten, die von der Bewegung im Einfallsstrome unabhängig sind.

Wir wollen deshalb besonders die permanente Energiekraft untersuchen, wenn sich die permanenten Schwingungen der Kugel dem Synchronismus mit den Schwingungen des Einfallsstromes nähern. Dabei betrachten wir, der Einfachheit halber, den Fall, daß die Schwingungen sinusförmig verlaufen.

Ein beliebiges der vier Glieder, welche im Ausdruck der Komponenten 122 (b) der permanenten Energiekraft auftreten, kann in der Form

$$(a) \quad F_e = - \dot{\sigma} \bar{S}$$

geschrieben werden, wobei $\dot{\sigma}$ die Geschwindigkeit im Parallelfeld und \bar{S} das Volumänderungsmoment, oder auch $\dot{\sigma}$ eine der deformativen Geschwindigkeitskomponenten, und \bar{S} eine Komponente des dynamischen Aktionsmomentes bedeuten kann.

Verändern sich die Koordinaten des Systems sinusförmig, so werden sich die mit Zeitableitungen proportionalen Größen $\dot{\sigma}$ und \dot{S} kosinusförmig verändern, und zugleich die linearen Mittelwerte Null haben. Wir setzen also $\dot{\sigma}$ und \dot{S} zwei Kosinussen proportional und fügen den numerischen Faktor $\sqrt{2}$ hinzu, weil ein mit diesem Faktor multiplizierter Kosinus den quadratischen Mittelwert 1 hat. Wir können dann

$$(b) \quad \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_m \sqrt{2} \cos(gt + g'), \quad \dot{S} = \dot{S}_m \sqrt{2} \cos(ht + h')$$

schreiben, wo $\dot{\sigma}_m$ und \dot{S}_m die quadratischen Mittelwerte der Größen $\dot{\sigma}$ und \dot{S} sind. Diese Größen deuten wir vorläufig als positiv, ohne noch die Vorzeichenregel 21 (B) anzuwenden. Die in dem Kosinus vorkommenden Parameter g und h sind die mit 2π multiplizierten Schwingungszahlen, g' und h' Zahlen, von welchen die Phasen abhängen.

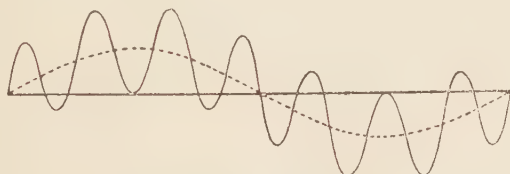


Fig. 30. Schwankungen der Energiekraft in der Nähe des Isochronismus.

Die Substitution von (b) in das Kraftglied (a) giebt

$$F_e = -\dot{\sigma}_m \dot{S}_m \cdot 2 \cos(gt + g') \cos(ht + h'),$$

oder nach einer einfachen Umformung des Produktes zweier Kosinusse

$$(c) \quad F_e = -\dot{\sigma}_m \dot{S}_m \cdot \left\{ \cos[(g+h)t + g' + h'] + \cos[(g-h)t + g' - h'] \right\}.$$

Das Kraftglied F_e macht also im Verlauf der Zeit eine doppelte Schwankung, deren jede kosinusförmig verläuft, und wobei die Schwingungszahl der einen die Summe, die der anderen die Differenz der beiden einzelnen Schwingungszahlen ist.

Jetzt denken wir uns, daß die Schwingungszahlen einander mehr und mehr gleich werden. Die erste, schnell verlaufende Kraftschwankung wird dabei wesentlich unverändert, die zweite, von der Differenz der Schwingungszahlen abhängige, wird dagegen immer langsamer verlaufen, so daß die Kraft als Funktion der Zeit graphisch durch die doppelt wellenförmige Kurve der Figur 30 dar-

gestellt werden kann. Betrachten wir nur den Mittelwert der Kraft während einer Periode der schnellen Schwankung, so wird dieser durch die Formel

$$(c') \quad F_e^0 = -\dot{\sigma}_m \dot{S}_m \cdot \cos[(g-h)t + (g'-h')]$$

dargestellt. Graphisch läßt sich dieser Mittelwert der Kraft durch die in der Figur punktierte Mittellinie mit langen Wellen darstellen. Nehmen wir schliesslich den Mittelwert der Kraft während einer Periode dieser langsamen Schwankung, so erhalten wir das Resultat Null.

Solange Schwingungen verschiedener Schwingungsdauer vorliegen, wird also die Kraft F_e immer den Mittelwert Null haben, wenn wir hinlänglich lange Zeiträume betrachten. Sie wird das Vermögen haben, langsam verlaufende schwingende Bewegungen mit Amplituden beliebiger Gröfse zu erzeugen, nicht aber andauernde Bewegungen unveränderlicher Richtung veranlassen können. Gehen wir aber zu dem Falle des exakten Isochronismus beider Schwingungen über, $g = h$, so reducirt sich der allgemeine Ausdruck (c) der Kraft auf

$$(d) \quad F_e = -\dot{\sigma}_m \dot{S}_m \left\{ \cos[(g+h)t + (g'+h')] + \cos(g'-h') \right\}.$$

Wir haben es also von jetzt an nur mit den schnellen Kraftschwankungen zu thun, die früheren langsamen Schwingungen haben eine unendliche Schwingungsdauer erhalten, und die entsprechende Wellenlinie ist eine gerade Linie parallel zur x' -Achse geworden. Der Mittelwert der Kraft für Zeiten beliebig grofser Länge wird

$$(d') \quad F_e^0 = -\dot{\sigma}_m \dot{S}_m \cdot \cos(g'-h')$$

und ist eine von der Zeit unabhängige Gröfse. Diese Kraft wird also andauernde Bewegungen bestimmter Richtung erzeugen können, ihre Intensität und ihr Vorzeichen hängt nur von dem Phasenunterschiede der beiden Schwingungen ab.

Ist $g' = h'$, so haben wir gleiche Phase; der Kosinus wird Eins, und wir finden für die thatsächliche und die mittlere Kraft beziehungsweise

$$(e) \quad \begin{aligned} F_e &= -\dot{\sigma}_m \dot{S}_m \left\{ \cos[(g+h)t + g' + h'] + 1 \right\} \\ F_e^0 &= -\dot{\sigma}_m \dot{S}_m. \end{aligned}$$

Die aktuelle Kraft wird durch die ganz unter der x -Achse liegende Wellenlinie der Figur 31a dargestellt, und die mittlere Kraft durch die punktierte Gerade. Verschieben sich die Phasen, so daß $g' - h' = \frac{\pi}{2}$, also der Phasenunterschied ein Viertel der ganzen Schwingungsdauer beträgt, so wird der Kosinus Null, und wir erhalten für die aktuelle und die mittlere Energiekraft

$$(e') \quad \begin{aligned} F_e &= -\dot{\sigma}_m \bar{S}_m \cos[(g+h)t + g' + h'] \\ F_e^0 &= 0. \end{aligned}$$

Die Kraft hat also den Mittelwert Null, die Wellenlinie Figur 31b liegt zur x -Achse symmetrisch, und die punktierte Mittellinie, welche

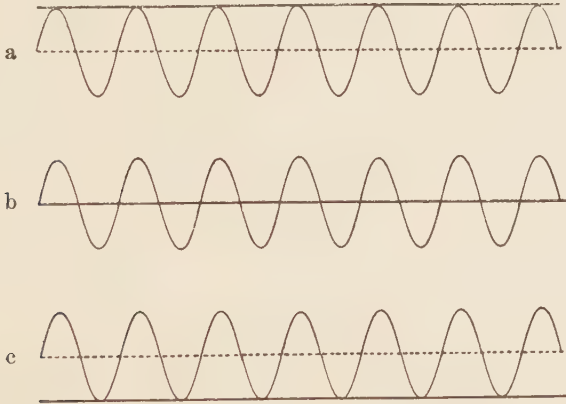


Fig. 31 a, b und c. Schwankungen der Energiekraft bei Isochronismus. a und c Synchronismus. b Viertel Phase.

die mittlere Kraft darstellt, ist mit dieser Achse zusammengefallen. Bei dem Phasenunterschiede $g' - h' = \pi$, welcher eine halbe Schwingungsdauer beträgt, wird die Kraft

$$(e'') \quad \begin{aligned} F_e &= -\dot{\sigma}_m \bar{S}_m \{ \cos[(g+h)t + g' + h'] - 1 \} \\ F_e^0 &= \dot{\sigma}_m \bar{S}_m, \end{aligned}$$

die Wellenlinie, welche F_e , und die punktierte Gerade, welche F_e^0 darstellt, liegen ganz oberhalb der x -Achse (Figur 31c).

Nach einer Verschiebung von noch einem Viertel der ganzen Schwingungsdauer haben wir wieder den durch die Figur 31b dar-

gestellten Fall, und die mittlere Kraft wird wieder Null. Nach einer neuen Verschiebung um eine viertel Phase kommt man zu dem Fall der Figur 31a zurück, und so weiter.

Ist der Phasenunterschied Null oder eine halbe Schwingungsdauer, so liegen nach unserer Definition synchrone Schwingungen vor (46). Anstatt in den Gleichungen (b) einen Phasenunterschied 0 oder $\frac{1}{2}$ einzuführen, können wir denselben Kosinus benutzen,

$$(f) \quad \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_m \sqrt{2} \cdot \cos(gt + g'), \quad \bar{S} = \bar{S}_m \sqrt{2} \cos(gt + g'),$$

und die Faktoren $\dot{\sigma}_m$ und \bar{S}_m als Größen mit Vorzeichen nach der Regel 21 (B) betrachten. Bei gleichem Vorzeichen dieser Größen erhalten wir dann die mittlere Kraft (e), bei entgegengesetztem Vorzeichen die entgegengesetzte mittlere Kraft (e''). Die Vorzeichen der Größen $\dot{\sigma}_m$ und \bar{S}_m sind in diesem Falle die Vorzeichen der Größen $\dot{\sigma}$ und \bar{S} selbst zu einer beliebig gegebenen Anfangszeit.

Die hier durchgeführten speziellen Überlegungen haben also zu genau demselben Resultate geführt, wie die unmittelbare Verwendung des Satzes 126. Der Ausdruck des Mittelwertes des betrachteten Kraftgliedes läßt sich im Falle synchroner Schwingungen

$$(g) \quad F_e^0 = - \dot{\sigma}_m \bar{S}_m$$

schreiben und ist mit dem ursprünglichen Ausdruck (a) identisch, nur daß die aktuellen Geschwindigkeiten und das aktuelle Volumänderungs- beziehungsweise Aktionsmoment durch die entsprechenden quadratischen Mittelwerte ersetzt worden sind.

Siebenter Abschnitt.

Einfluß der Energiekraft auf die Bewegung der Kugel.

128. **Beziehung der Energiekraft zur Bewegung der Kugel und der Flüssigkeit.** — Wie die hydrodynamische Energiekraft als Funktion der Zeit auftritt, ist aus den Untersuchungen der vorhergehenden Abschnitte klar. Betrachten wir sie jetzt in Bezug auf

ihre geometrischen Eigenschaften, das heisst in Bezug auf die Abhängigkeit ihrer Richtung und Grösse von dem Bewegungszustande der Kugel und der Flüssigkeit. Dabei untersuchen wir erst die totale Energiekraft 119 (a), um uns später den besonderen Eigenschaften der permanenten und der temporären Partialkräfte zuzuwenden.

Im Ausdrucke der Energiekraft treten als Repräsentanten der Bewegung der Flüssigkeit erstens die translatorischen Geschwindigkeitskomponenten

$$(a) \quad \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma},$$

und zweitens die deformativen Geschwindigkeiten

$$(b) \quad \dot{\alpha}_\alpha, \dot{\alpha}_\beta, \dot{\alpha}_\gamma, \dots$$

auf. Hier muss beachtet werden, dass (a) und (b) die Geschwindigkeitskomponenten des ursprünglichen, von der Bewegung der Kugel noch nicht gestörten Einfallsstromes darstellen. Wir brauchen deshalb nicht auf die thatsächlich vorliegenden komplizierten Felder Rücksicht zu nehmen, sondern denken uns, wie schon bei früheren Gelegenheiten, die Bewegung des Einfallsstromes und die Bewegung der Kugel einander ungestört superponiert.

Jede der Grössen (a) und (b) erscheint im Ausdrucke der Energiekraft mit einem Faktor multipliziert, welcher als Repräsentant der Bewegung der Kugel aufgefasst werden kann. Als Faktor der Translationsgeschwindigkeit der Flüssigkeit tritt das Volumänderungsmoment

$$(a') \quad \bar{E}$$

auf, welches der Volumausdehnungsgeschwindigkeit proportional ist. Als Faktoren der deformativen Geschwindigkeiten (b) treten die Komponenten des dynamischen Aktionsmomentes

$$(b') \quad \bar{F}, \bar{G}, \bar{H}$$

auf. Wenn wir dieselben als Repräsentanten der Bewegung der Kugel ansehen, dürfen wir jedoch nicht vergessen, dass die in ihnen enthaltenen translatorischen Geschwindigkeitskomponenten des Mittelpunktes der Kugel nicht die absoluten, sondern die zum Einfallsstrom relative Geschwindigkeitskomponenten sind, wie die Ausdrücke 118 (d) zeigen.

Die hydrodynamische Energiekraft zerlegt sich deshalb in zwei

wesentlich verschiedene Partialkräfte: Die erste wird eine im Parallelfelde auftretende oder von der Volumänderung der Kugel abhängige, die zweite eine im Deformationsfelde auftretende, oder von der relativen Translationsbewegung der Kugel abhängige Kraft sein.

129. Die von der Volumänderung der Kugel abhängige Energiekraft. — Die Komponenten der somit definierten ersten Partialkraft sind:

$$\begin{aligned} X_e &= -\alpha \bar{E} \\ Y_e &= -\beta \bar{E} \\ Z_e &= -\gamma \bar{E}. \end{aligned}$$

Wir schließen also:

(A) *Die Energiekraft, welche die volumändernde Kugel angreift, ist gleich dem negativ genommenen Produkte aus der Geschwindigkeit des Parallelstromes in das Volumänderungsmoment der Kugel.*

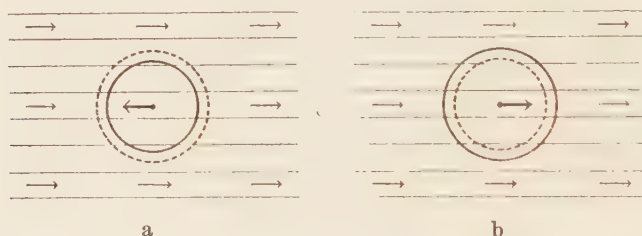


Fig. 32, a und b. Energiekraft gegen expandierende Kugel (a) und kontrahierende Kugel (b) im Parallelfelde.

Lösen wir \bar{E} in seine Faktoren q und \dot{E} auf, so sehen wir, daß die Kugel durch ihre Volumänderungsgeschwindigkeit, die Flüssigkeit durch ihre Dichte und ihre lineare Geschwindigkeit wirkt. Weiter findet man als einfache Regel für die Kraft-richtung:

(B) *Die expandierende Kugel wird gegen den Strom, die kontrahierende mit dem Strome getrieben.*

Der Satz wird durch die Figuren 32a und b illustriert, wo die Bewegungen der Kugel und des Parallelstromes als einander ungestört superponiert gezeichnet sind, und der stark gezeichnete, an dem Mittelpunkte der Kugel angreifende Pfeil die resultierende Energiekraft darstellt.

Die Kraftregeln (A) und (B) sind auf das ursprüngliche, von

dem Vorhandensein der Kugel noch nicht gestörte Parallelfeld bezogen. Die Kraft steht aber in enger Beziehung zu der Asymmetrie des reellen Feldes. Auf derjenigen Seite der Kugel, wo der Radialstrom dem Parallelstrom entgegenwirkt, findet sich ein neutraler Punkt (Fig. 21), und man sieht, daß die eben gegebene Regel über die Kraftrichtung mit der folgenden identisch wird:

(C) *Die Energiekraft sucht die volumändernde Kugel gegen den neutralen Punkt des umgebenden Feldes hinzutreiben.*

130. Die von der relativen Translationsbewegung der Kugel abhängige Energiekraft. — Die zweite partielle Energiekraft, welche von der relativen translatorischen Bewegung der Kugel und dem äußeren Deformationsstrom abhängt, hat die Komponenten:

$$\begin{aligned} X_e &= -\{\dot{\alpha}_\alpha \bar{F} + \dot{\alpha}_\beta \bar{G} + \dot{\alpha}_\gamma \bar{H}\} \\ (a) \quad Y_e &= -\{\dot{\beta}_\alpha \bar{F} + \dot{\beta}_\beta \bar{G} + \dot{\beta}_\gamma \bar{H}\} \\ Z_e &= -\{\dot{\gamma}_\alpha \bar{F} + \dot{\gamma}_\beta \bar{G} + \dot{\gamma}_\gamma \bar{H}\}. \end{aligned}$$

Hier sind \bar{F} , \bar{G} , \bar{H} die Komponenten des dynamischen Aktionsmomentes, also nach der allgemeinsten Definition dieser Größen

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \frac{3}{2} q E (\dot{a} - \dot{\alpha}) \\ (b) \quad \bar{G} &= \frac{3}{2} q E (\dot{b} - \dot{\beta}) \\ \bar{H} &= \frac{3}{2} q E (\dot{c} - \dot{\gamma}). \end{aligned}$$

Für das Auftreten dieser Kraft ist also eine notwendige Bedingung, daß die Kugel relativ zu dem umgebenden Parallelstrom eine Translationsbewegung hat, so daß eine Konfliktgeschwindigkeit

$$(c) \quad \dot{a} - \dot{\alpha}, \quad \dot{b} - \dot{\beta}, \quad \dot{c} - \dot{\gamma}$$

vorhanden ist. Dabei ist es gleichgültig, ob absolut genommen die Kugel in Ruhe ist, und die Flüssigkeit vorüberströmt, oder umgekehrt die Kugel bewegt ist, während das umgebende Parallelfeld fehlt. In allen Fällen wird die Konfliktgeschwindigkeit das Aktionsmoment eindeutig bestimmen, und von der Beziehung des Aktionsmomentes zu dem umgebenden Deformationsfelde wird die Kraft abhängen.

Nachdem das Aktionsmoment der Kugel bestimmt ist, können wir von dem etwa vorhandenen Parallelstrom absehen und die

Vorstellung benutzen, daß die Kugel sich nur in einem Deformationsstrom befindet, und daß ihr Mittelpunkt im betrachteten Augenblicke durch das Deformationszentrum passiert mit einer der Konfliktgeschwindigkeit (c) gleichen absoluten Geschwindigkeit.

Um ein geometrisches Bild dieser Kraft in Bezug auf GröÙe und Richtung zu erhalten, können wir die Kraftkomponenten (a) mit den ganz ähnlich gebauten Ausdrücken 54 (a) der Geschwindigkeitskomponenten im Deformationsfelde, nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \dot{\alpha}_a(x-a) + \dot{\alpha}_\beta(y-b) + \dot{\alpha}_\gamma(z-c) \\ \text{(d)} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \dot{\beta}_a(x-a) + \dot{\beta}_\beta(y-b) + \dot{\beta}_\gamma(z-c) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \dot{\gamma}_a(x-a) + \dot{\gamma}_\beta(y-b) + \dot{\gamma}_\gamma(z-c) \end{aligned}$$

vergleichen. Die Ausdrücke (a) und (d) werden untereinander

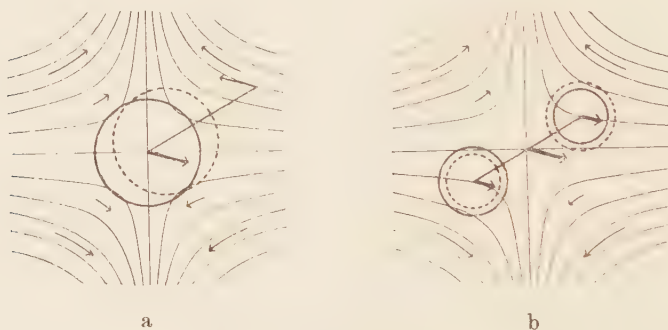


Fig. 33, a und b. Energiekraft im Deformationsfelde gegen fortschreitende Kugel (a), und gegen volumänderndes Kugelpaar (b).

entgegengesetzt gleich, wenn wir $x-a$, $y-b$, $z-c$ mit \vec{F} , \vec{G} , \vec{H} identifizieren. Das heißt:

Trägt man von dem Centrum des Deformationsfeldes eine Strecke ab, welche das dynamische Aktionsmoment darstellt, so wird die negativ genommene Geschwindigkeit des Deformationsfeldes im anderen Endpunkte dieser Strecke die im Centrum angreifende Energiekraft an GröÙe und Richtung darstellen.

Nach dieser Regel kann man die Kraft durch eine einfache Konstruktion finden, wenn das ursprüngliche Deformationsfeld durch Stromlinien oder Solenoide dargestellt ist (Figur 33 a).

Das somit gefundene Kraftgesetz läßt sich auch unmittelbar aus dem für die volumändernde Kugel im Parallelstrome gültigen ableiten. Das mit der fortschreitenden Kugel äquivalente volumändernde Kugelpaar wird in einer expandierenden Kugel etwas vor, und in einer kontrahierenden Kugel ebensoviel hinter dem Mittelpunkt der fortschreitenden Kugel bestehen. Die kontrahierende Kugel wird von einer Kraft in der Stromrichtung, die expandierende von einer Kraft gegen die Stromrichtung angegriffen. Da sich nun die Kugeln in entgegengesetzt gleichen Strömen befinden, sind diese beiden Kräfte gleich groß und gleich gerichtet. Die Krafrichtung ist, wie man sofort sieht, identisch mit der Richtung der Kraft, welche die fortschreitende Kugel angreift. Da die Stromintensität im Parallelfelde proportional dem Abstände von dem Feldcentrum zunimmt, findet man sofort, daß die Kraft dem Produkte der Volumausdehnungsgeschwindigkeit der einen Kugel in den Centralabstand der beiden, das heißt dem Aktionsmoment, proportional ist.

Diese Kraftregeln beziehen sich alle auf die Beziehung der Bewegung der Kugel zu derjenigen des Einfallsstromes. Der Vergleich mit den aktuellen Feldern, deren die Figuren 22 und 23 Beispiele abgeben, ist aber auch lehrreich. Die im Centrum eines Deformationsfeldes befindliche volumändernde Kugel erzeugt ein symmetrisches Feld, die Kugel liegt symmetrisch zwischen zwei neutralen Punkten und wird gegen keinen derselben hingetrieben. Die fortschreitende Kugel erzeugt dagegen ein unsymmetrisches Feld; sie hat in der Figur 23 vor sich auf der Rotationsachse einen neutralen Punkt, gegen welchen sie hingetrieben wird.

131. Regel von dem virtuellen Zuwachs der Konfliktgeschwindigkeit. — Die Krafrichtung, welche man nach der Konstruktion der Figur 33 a findet, wird nach dem Satze 57 diejenige Richtung sein, in der die Geschwindigkeit des Deformationsfeldes die größte negative Projektion auf das Aktionsmoment hat. Trägt man in dieser Richtung als Radiusvektor diejenige Länge ab, welche das Aktionsmoment der Kugel darstellt, so wird man nach der Formel 57(c) zu einer Stelle kommen, wo die Projektion der vorhandenen Geschwindigkeit auf das Aktionsmoment die Größe der Kraft darstellt. Die Größe der Kraft ist folglich der auf die Längeneinheit des gezeichneten Radiusvektors bezogene Zuwachs der betreffenden Geschwindigkeitskomponente, multipliziert mit dem Aktionsmomente. Als neue Kraftregel finden wir also:

(A) *Die Energiekraft sucht die Kugel in der Richtung zu verschieben,*

wo die dem Aktionsmomente der Kugel entgegengesetzte Geschwindigkeitskomponente am größten ist, und ist gleich dem Produkte des Aktionsmomentes in die Ableitung dieser Geschwindigkeitskomponente nach jener Richtung.

Diese Regel ist ganz davon unabhängig, ob nur ein Deformationsfeld vorliegt, in dessen Centrum sich augenblicklich die Kugel befindet, oder ob ein beliebiges Potentialfeld betrachtet wird. Denn der Wert, welchen die Ableitung der betreffenden Geschwindigkeitskomponente im Entwicklungscentrum hat, wird nur von dem in dem Potentialfelde enthaltenen Deformationsfelde abhängen.

Wenn wir die Kraftregel nur zu qualitativen Zwecken brauchen, besonders um die Richtung der Kraft in einem gegebenen Strome zu finden, so betrachten wir am zweckmäßigsten anstatt des Aktionsmomentes die damit proportionale Konfliktgeschwindigkeit $\dot{a} - \dot{\alpha}$, $\dot{b} - \dot{\beta}$, $\dot{c} - \dot{\gamma}$. Wenn wir eine wirkliche Verschiebung der Kugel ausführen, wird im allgemeinen nicht nur die Geschwindigkeit $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ des Feldes, sondern infolge der veränderten Induktionskraft auch die aktuelle Geschwindigkeit \dot{a} , \dot{b} , \dot{c} der Kugel sich verändern. Denken wir uns aber eine virtuelle Verschiebung, wobei die aktuelle Geschwindigkeit der Kugel unverändert bleibt, so daß die entsprechende virtuelle Veränderung der Konfliktgeschwindigkeit nur auf der Variation der Größen $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ beruht, so können wir die Regel über die Richtung der Kraft in der folgenden einfachen Weise aussprechen:

(B) *Die Kugel sucht sich so zu bewegen, daß der virtuelle Zuwachs der Konfliktgeschwindigkeit zu jeder Zeit so groß als möglich wird.*

Ob die reelle Bewegung in der Krafrichtung auch eine reelle Vergrößerung der Konfliktgeschwindigkeit zur Folge haben wird oder nicht, wird von der gleichzeitigen Variation der aktuellen Geschwindigkeit der Kugel abhängen.

132. Beispiele der Energiekraft gegen die fortschreitende Kugel in einem Flüssigkeitsstrome. — Einige Beispiele werden die Anwendung dieser Regel erläutern.

Es sei erst der um seine Achse symmetrische divergierende Strom gegeben, und es bewege sich die Kugel längs dieser Stromachse. Ist die absolute Bewegung der Kugel gegen den Strom gerichtet (Figur 34 a), so wird eine Verschiebung in der Richtung zunehmender Stromintensität oder konvergierender Stromlinien den größtmöglichen virtuellen Zuwachs der Konfliktgeschwindigkeit

erzeugen, die Kugel wird also von der Energiekraft in dieser Richtung getrieben. Dasselbe wird noch der Fall sein, wenn sich die Kugel mit dem Strom bewegt, aber mit kleinerer absoluter Geschwindigkeit als derselbe, so daß die Bewegung der Kugel relativ zu dem Strome eine entgegengesetzte ist. Bewegt sich aber die Kugel mit dem Strome, und schneller als derselbe (Figur 34 b), so wird sie in der Richtung abnehmender Stromintensität getrieben.

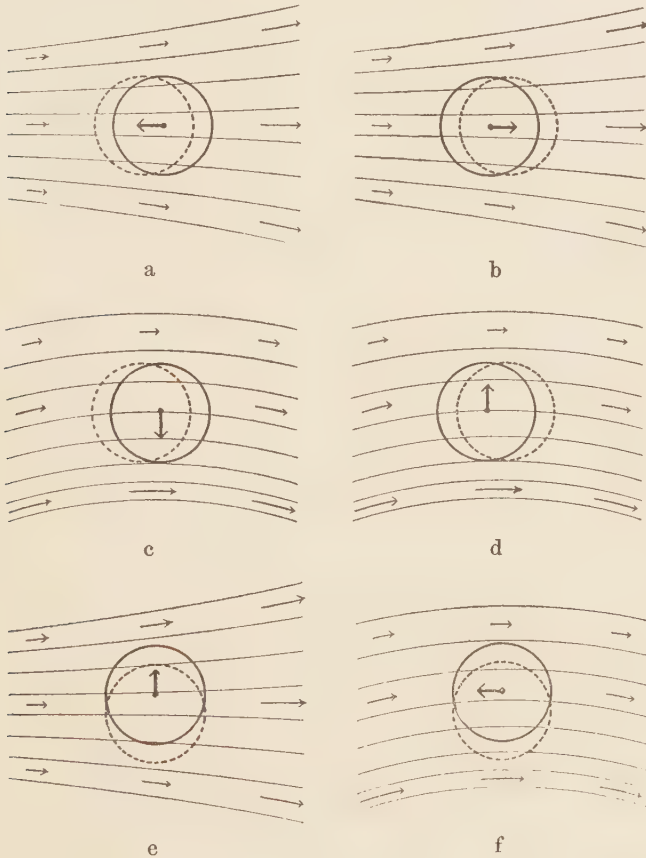


Fig. 34, a bis f. Energiekraft gegen eine fortschreitende Kugel in divergierendem oder in gekrümmtem Strome.

Wir betrachten dann den Fall eines gekrümmten Stromes, wo sich also die Stromintensität senkrecht zur Richtung des Stromes verändert, und auf der konkaven Seite der Stromlinien am stärksten ist. Bewegt sich in diesem Falle die Kugel gegen den Strom, so wird sie quer zu demselben in der Richtung zunehmender Strom-

intensität getrieben (Figur 34 c). Dasselbe wird der Fall sein, wenn die absolute Bewegung der Kugel derjenigen des Stromes gleichgerichtet ist, aber kleiner, so daß die relative Bewegung eine entgegengesetzte wird. Läuft aber die Kugel mit dem Strome, und schneller als derselbe, so wird sie wieder quer zur Stromrichtung, aber in der Richtung abnehmender Stromintensität getrieben (Figur 34 d).

Bewegt sich die Kugel senkrecht zu dem divergierenden Strome, so wird sie von der Energiekraft senkrecht zur Stromachse getrieben, und zwar in der Richtung, wo die zunehmende laterale Stromkomponente der absoluten Bewegung der Kugel entgegengesetzt ist. Ist die Bewegung der Kugel senkrecht zu dem gekrümmten Strome gerichtet, so wird sie von der Energiekraft entweder längs oder entgegengesetzt der Stromrichtung getrieben, und zwar nach derjenigen Seite hin, wo infolge der Richtungsveränderung des Stromes eine Geschwindigkeitskomponente desselben der Geschwindigkeit der Kugel entgegengesetzt ist (Figur 34 f).

133. Die permanente Energiekraft. — Die Energiekraft gegen die volumändernde Kugel gehört immer derjenigen Partialkraft an, welche wir als die permanente Energiekraft bezeichnet haben (122). Die Energiekraft gegen die fortschreitende Kugel kann dagegen je nach den Umständen permanenter, temporärer oder zusammengesetzter Natur sein. In allen Fällen behalten die oben entwickelten Resultate ihre Gültigkeit. Um aber die Diskussion weiterführen zu können, müssen wir die permanente und die temporäre Partialkraft getrennt betrachten.

Die permanente Energiekraft hat die Form 129 (a) und 130 (a), nur daß man \bar{F} , \bar{G} , \bar{H} als die permanenten Aktionsmomente auffaßt (121). Da dieselben Größen sind, welche von dem umgebenden Flüssigkeitsstrome unabhängige Werte haben, erhält die Regel von dem virtuellen Zuwachs der Konfliktgeschwindigkeit eine besonders einfache Bedeutung. Denn da eine wirkliche Verschiebung der Kugel keinen Einfluß auf den Wert der permanenten Geschwindigkeit ($\bar{a}_p, \bar{b}_p, \bar{c}_p$) der Kugel hat, so hat man nur mit der Variation der Geschwindigkeit ($\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$) zu thun, und die Verschiebung wird immer einen wirklichen Zuwachs der Konfliktgeschwindigkeit ($\bar{a}_p - \dot{\alpha}, \bar{b}_p - \dot{\beta}, \bar{c}_p - \dot{\gamma}$) zur Folge haben.

Eine andere Folge der permanenten Natur des Aktionsmomentes, sowie des Volumänderungsmomentes ist die, daß man unmittelbar eine Kräftefunktion für diese Kraft aufstellen kann. Bezeichnen wir

zu diesem Zwecke den Mittelpunkt der Kugel vollständiger durch a_g, b_g, c_g , so ist nach Analogie von 78(b):

$$(a) \quad \begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{\partial \varphi}{\partial a_g}, & \dot{\beta} &= \frac{\partial \varphi}{\partial b_g}, & \dot{\gamma} &= \frac{\partial \varphi}{\partial c_g} \\ \dot{\alpha}_\alpha &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a_g^2} = \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial a_g}, & \dot{\alpha}_\beta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a_g \partial b_g} = \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial a_g}, & \dot{\alpha}_\gamma &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a_g \partial c_g} = \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial a_g}, \\ &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

wo wie gewöhnlich die Ableitung von φ nach a_g, b_g, c_g eine vorhergehende Substitution $x=a_g, y=b_g, z=c_g$ voraussetzt, wobei wir jedoch den Fall ausschließen, daß φ schon vor dieser Substitution die Größen a_g, b_g, c_g als Parameter enthält. Führt man (a) in den Formeln 129(a) und 130(a) der permanenten Energiekraft ein und erinnert sich, daß die Komponenten des permanenten Aktionsmomentes von a_g, b_g, c_g unabhängig sind, so ergibt sich, daß man

$$(b) \quad X_p^e = \frac{\partial \Psi_p}{\partial a_g}, \quad Y_p^e = \frac{\partial \Psi_p}{\partial b_g}, \quad Z_p^e = \frac{\partial \Psi_p}{\partial c_g}$$

schreiben kann, wo die Kräftefunktion Ψ_p die Form

$$(c) \quad \Psi_p = -\varphi \bar{E} - \{\dot{\alpha} \bar{F} + \dot{\beta} \bar{G} + \dot{\gamma} \bar{H}\}$$

hat.

Ist schließlich $\dot{\sigma}$ wie früher die Geschwindigkeit, welche die Komponenten $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ hat, und \bar{S} das Aktionsmoment mit den Komponenten $\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}$, und θ der zwischen $\dot{\sigma}$ und \bar{S} eingeschlossene Winkel, so kann Ψ_p auch in der Form

$$(c') \quad \Psi_p = -\varphi \bar{E} - \dot{\sigma} \bar{S} \cos \theta$$

geschrieben werden.

Das erste Glied dieser Kräftefunktion

$$(d) \quad \Psi_p^0 = -\varphi \bar{E}$$

bezieht sich auf die Kraft, welche die volumändernde Kugel angreift, und sagt aus, daß sich die expandierende Kugel in derjenigen Richtung bewegen wird, wo das Geschwindigkeitspotential φ am schnellsten abnimmt, die kontrahierende Kugel in derjenigen Richtung, wo dasselbe am schnellsten zunimmt, was mit dem früheren Resultate von der Bewegung gegen oder mit dem Strom übereinstimmt.

Das zweite Glied

$$(e) \quad \psi_p^1 = - \dot{\sigma} \bar{S} \cos \theta$$

bezieht sich auf die Kraft gegen die fortschreitende Kugel und sagt aus, daß sich die Kugel in derjenigen Richtung translatorisch zu verschieben sucht, wo das mit dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels multiplizierte Produkt des Aktionsmomentes \bar{S} der Kugel in die Geschwindigkeit des ursprünglichen Stromes am schnellsten abnimmt. Man überzeugt sich leicht, daß diese Kraftregel in allen Fällen zu demselben Resultate wie die Regel von der virtuellen, in diesem Falle reellen Zunahme der Konfliktgeschwindigkeit führt.

134. Die temporäre Energiekraft. — Die Komponenten des temporären Aktionsmomentes sind nach 121

$$(a) \quad \begin{aligned} \bar{F}_t &= \frac{3}{2} q (\dot{a}_t - \dot{\alpha}) E = \frac{3}{2} q \frac{q - Q}{Q + \frac{1}{2} q} \dot{\alpha} E \\ \bar{G}_t &= \frac{3}{2} q (\dot{b}_t - \dot{\beta}) E = \frac{3}{2} q \frac{q - Q}{Q + \frac{1}{2} q} \dot{\beta} E \\ \bar{H}_t &= \frac{3}{2} q (\dot{c}_t - \dot{\gamma}) E = \frac{3}{2} q \frac{q - Q}{Q + \frac{1}{2} q} \dot{\gamma} E. \end{aligned}$$

Dasselbe ist also der Geschwindigkeit $(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$ des Stromes entweder entgegengesetzt oder gleichgerichtet, während das permanente Aktionsmoment eine von dem Strom unabhängige Richtung haben kann. Wir begegnen also nur den durch die Figuren 34, a, b, c, d dargestellten Fällen, nicht aber denjenigen der Figuren 34, e und f. Bei der Verwendung der Regel von dem virtuellen Zuwachs der Konfliktgeschwindigkeit muß man scharf diesen virtuellen Zuwachs von dem reellen trennen, der infolge einer wirklichen Verschiebung eintritt. Denn während wir bei der virtuellen Verschiebung uns die Geschwindigkeit der Kugel, in diesem Falle also $(\dot{a}_t, \dot{b}_t, \dot{c}_t)$, als konstant vorzustellen haben, wird sie sich bei einer wirklichen Verschiebung proportional $(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$ verändern 120 (A), so daß der reelle Zuwachs der Konfliktgeschwindigkeit einfach proportional dem Zuwachs der Geschwindigkeit des Stromes wird.

Setzen wir die Werte (a) des temporären Aktionsmomentes und gleichzeitig die Ausdrücke 133 (a) der deformativen Geschwindigkeiten in der ersten Zeile 130 (a) ein, so ergibt sich

$$(b) \quad X_t^e = -\frac{3}{2}q \frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q} E \left\{ \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial a_g} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial a_g} + \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial a_g} \right\}.$$

Dieser Ausdruck hat also die Form einer Ableitung nach a_g , und die temporäre Energiekraft läßt sich daher auch durch eine Kräftefunktion ausdrücken:

$$(c) \quad X_t^e = \frac{\partial \Psi_t}{\partial a_g}, \quad Y_t^e = \frac{\partial \Psi_t}{\partial b_g}, \quad Z_t^e = \frac{\partial \Psi_t}{\partial c_g},$$

wo

$$(d) \quad \Psi_t = -\frac{3}{4}q \frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q} E \left\{ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \right\}$$

ist.

135. Beziehung der temporären Energiekraft zu der Energieverteilung im Einfallsstrom. — Die gefundene Kräftefunktion ist der GröÙe

$$(a) \quad \tau = \frac{1}{2}q \{ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \}$$

proportional, welche den Energievorrat pro Volumeinheit im ursprünglichen Stromfeld darstellt. Als Proportionalitätsfaktoren treten $-\frac{3}{2}E$ und der in **110(a')** definierte Koeffizient der induzierten Konfliktgeschwindigkeit, nämlich

$$(b) \quad \frac{q-Q}{Q+\frac{3}{2}q}$$

auf. Die temporäre Kraft steht also zu der Energieverteilung im ursprünglichen Stromfeld in enger Beziehung. Die Energieverteilung läßt sich durch Flächen

$$(c) \quad \tau = \text{const.}$$

oder isoenergetische Flächen beschreiben. Dieselben stellen in gewöhnlicher lamellärer Weise die VektorgröÙe

$$(d) \quad \frac{\partial \tau}{\partial a_g}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial b_g}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial c_g}$$

dar, welche wir den energetischen Vektor nennen können, und welche die Richtung angiebt, in welcher die Energie des Feldes am schnellsten zunimmt, und die den Betrag dieser Zunahme mißt. Ist dieser Vektor bekannt, so findet man, wie aus dem Obigen sofort hervorgeht, die temporäre Kraft einfach nach der folgenden Regel:

Die temporäre Kraft gegen eine Kugel ist das negativ genommene Produkt des energetischen Vektors des Einfallstromes in den Koeffizienten der inducierten Konfliktgeschwindigkeit und in das $\frac{3}{2}$ fache des Volumens der Kugel.

136. Bewegung leichter und schwerer Kugeln unter dem Einflusse der temporären Energiekraft. — Ist Q kleiner als q , die Kugel also leichter als die Flüssigkeit, so ist der Koeffizient der inducierten Konfliktgeschwindigkeit positiv. Die Kugel schwingt also schneller als die Flüssigkeit, so daß wir im Grenzfall der unendlich leichten Kugel das durch die Figur 18 dargestellte Feld haben. Die Kugel wird dann in der Richtung abnehmender Feldenergie oder in der Richtung abnehmender Stromintensität getrieben, wie man auch nach der Regel von der virtuellen Zunahme der Konfliktgeschwindigkeit schließen wird (vergl. Figur 34 b und d). In diesem Falle wird aber die reelle Verschiebung der Kugel eine reelle Verminderung der Konfliktgeschwindigkeit zur Folge haben, da die Konfliktgeschwindigkeit der Geschwindigkeit des Feldes proportional ist.

Ist Q gleich q , sind also Kugel und Flüssigkeit gleich schwer, so wird der Koeffizient der inducierten Konfliktgeschwindigkeit Null. Die Kugel wird in ihrer Bewegung genau der Flüssigkeit folgen, und die temporäre Kraft verschwindet identisch.

Ist schließlich Q größer als q , die Kugel also schwerer als die Flüssigkeit, so ist der Koeffizient der inducierten Konfliktgeschwindigkeit negativ. Die Kugel bewegt sich also langsamer als die Flüssigkeit, und ihre relative Geschwindigkeit ist immer gegen den Strom gerichtet. Wir haben also Felder vom Typus der Figur 19. Die Kugel wird in der Richtung zunehmender Feldenergie, oder in der Richtung zunehmender Stromintensität getrieben (vergl. Figur 34, a und c). In diesem Falle ist die reelle Verschiebung der Kugel nach dieser Richtung auch mit einem reellen Zuwachs der Konfliktgeschwindigkeit verbunden.

Das qualitative Ergebnis dieser Diskussion läßt sich in den Satz zusammenfassen:

Temporäre Energiekraft wirkt nur gegen Kugeln, welche eine von der Flüssigkeit verschiedene Dichte haben. Schwere Kugeln werden in der Richtung zunehmender, leichte in der Richtung abnehmender Stromenergie getrieben.

137. Die Bewegung einer pulsierenden oder oscillierenden Kugel im oscillierenden Einfallstrom. — Die oben entwickelten Resultate

beziehen sich alle auf den augenblicklichen Wert der hydrodynamischen Energiekraft bei gegebenen Bewegungen der Kugel und des Einfallstromes. Mit Hilfe der allgemeinen Resultate des vorhergehenden Abschnittes über die Abhängigkeit dieser Kraft von der Zeit können wir unmittelbar zu den Mittelwerten der Kraft im Falle schwingender Bewegungen übergehen.

Wie schon dort bemerkt, sind die Bedingungen des Synchronismus immer von selbst erfüllt im Falle der temporären Energiekraft (127). Diese Kraft wird also nach 126 immer einen von Null verschiedenen Mittelwert haben, so daß sie, wenn sie überhaupt besteht, der Kugel eine progressive Bewegung bestimmter Richtung durch jeden längs fester Stromlinien oscillierenden Einfallstrom erteilen wird.

Die permanenten Pulsationen oder Oscillationen der Kugel brauchen dagegen nicht mit den Oscillationen des Einfallstromes synchron zu sein. Solange voneinander verschiedene Perioden vorliegen, wird die Energiekraft zwei Perioden haben und im allgemeinen nur schwache hin- und hergehende Bewegungen der Kugel erzeugen. Nähern sich die Schwingungen dem Isochronismus, so wird die eine Periode der Energiekraft immer länger, und die hin- und hergehende Bewegung der Kugel wird mit immer größerer Schwingungsdauer verlaufen und Amplituden beliebiger Größe erreichen können. Tritt strenger Isochronismus ein, so erhält die mittlere Kraft unveränderliche Richtung und wird der Kugel eine bestimmte progressive Bewegung durch den Einfallstrom erteilen. Im Falle des Synchronismus erhält diese Kraft ihren größten positiven oder negativen Wert und wird durch die oben entwickelten Formeln dargestellt werden können, wenn man die eingehenden Aktionsmomente und Geschwindigkeiten als quadratische Mittelwerte auffaßt. Die pulsierende Kugel wird dabei immer längs der Stromlinien des Einfallstromes getrieben, so daß sie sich während der Expansion gegen den Strom und während der Kontraktion mit dem Strom bewegt. Die oscillierende Kugel wird dahin getrieben, wo die Oscillationen des Stromes die größte Komponente gegen die Oscillationen der Kugel haben. Dabei setzen wir voraus, daß die permanenten Oscillationen eine unveränderliche Richtung im Raume haben.

Wenn die Kugel der hydrodynamischen Energiekraft nachgiebt, so wird sie eine energetische Geschwindigkeit erhalten, welche im Ausdruck des permanenten Aktionsmomentes ein neues Glied erzeugen wird. Es entsteht also eine sekundäre, von der erzeugten progressiven Bewegung der Kugel abhängige Energiekraft. Dieselbe

wird wieder die Form **130(a)** haben. Denken wir uns die Geschwindigkeit der progressiven Bewegung konstant, so werden die entsprechenden in **130(a)** eingehenden Komponenten \vec{F} , \vec{G} , \vec{H} des Aktionsmomentes von der Zeit unabhängige Größen sein, während dagegen $\dot{\alpha}_a$, $\dot{\alpha}_\beta$, $\dot{\alpha}_\gamma$ periodische Funktionen der Zeit bleiben, welche den Mittelwert Null haben. Die ganze sekundäre Energiekraft wird deshalb auch den Mittelwert Null erhalten, wie groß auch die von der primären Energiekraft erzeugte progressive Geschwindigkeit sein mag. Da weiter die von der mittleren primären Energiekraft erzeugte progressive Geschwindigkeit nur verschwindend kleine Änderungen im Verlaufe einer Periode der Flüssigkeitsschwingungen erleiden kann, wird die gestellte Bedingung von der Konstanz der Geschwindigkeit immer als sehr genau erfüllt betrachtet werden können. Nur wenn aus irgend einem Grunde die progressive Bewegung rhythmisch wird, mit derselben Periode wie die Flüssigkeitsoscillationen, wird die sekundäre Energiekraft von Bedeutung werden können. Ein solcher Rhythmus tritt in der That ein, wenn die Kugel pulsierend ist (**97**). Da derselbe aber um eine viertel Phase gegen die Pulsationen der Kugel und die damit synchronen Oscillationen des Stromes verschoben ist, wird auch die auf diesem Rhythmus beruhende sekundäre Energiekraft den Mittelwert Null haben [vergl. **127(e')**] und für die progressive Bewegung der Kugel bedeutungslos sein. Die mittlere Energiekraft gegen pulsierende oder oscillierende Kugel ist deshalb von jeder progressiven Bewegung derselben unabhängig.

Achter Abschnitt.

Drehung der Kugel.

138. Das Drehungsmoment, welches ein volumänderndes Kugel-paar angreift. — Bei der obigen Diskussion des Einflusses der Energiekraft auf die Bewegung einer permanent oscillierenden Kugel im oscillierenden Flüssigkeitsstromen haben wir uns immer vorgestellt, daß die Oscillationsachse eine im Raume feste Richtung habe. Wir werden jetzt direkt die Stabilität der Richtung der Oscillationsachse untersuchen.

Als einleitende Untersuchung empfiehlt es sich, anstatt der oscillierenden Kugel selbst ein äquivalentes pulsierendes Kugelpaar zu betrachten. Es befinde sich ein solches in einem Parallelstrome. Die zur betrachteten Zeit kontrahierende Kugel soll ihren Mittelpunkt im Punkte a_0, b_0, c_0 haben. Sie wird von der Energiekraft

$$(a) \quad X_e^0 = \dot{\alpha} \bar{E}, \quad Y_e^0 = \dot{\beta} \bar{E}, \quad Z_e^0 = \dot{\gamma} \bar{E}$$

angegriffen. Die expandierende Kugel, welche ihr Centrum im Punkte a, b, c haben soll, wird von der entgegengesetzt gleichen Kraft angegriffen, welche die Komponenten

$$(b) \quad X_e = -\dot{\alpha} \bar{E}, \quad Y_e = -\dot{\beta} \bar{E}, \quad Z_e = -\dot{\gamma} \bar{E}$$

hat. Die beiden Kräfte werden ein Kräftepaar bilden; das Moment desselben wird gleich dem statischen Moment der Kraft (b) in Bezug auf den Punkt a_0, b_0, c_0 , und hat also die Komponenten

$$(c) \quad \begin{aligned} L &= Z_e(b - b_0) - Y_e(c - c_0) \\ M &= X_e(c - c_0) - Z_e(a - a_0) \\ N &= Y_e(a - a_0) - X_e(b - b_0). \end{aligned}$$

Hier setzen wir die Werte (b) der Kraftkomponenten ein. Die Ausdrücke von L, M, N werden dann die Produkte des Volumänderungsmomentes \bar{E} in die Strecken $a - a_0, b - b_0, c - c_0$ enthalten. Erinnern wir uns an die Definition 26(a₂) des kinematischen Aktionsmomentes des Kugelpaares, und an den Zusammenhang 118(A) zwischen kinematischem und dynamischem Aktionsmoment, so sehen wir, daß die genannten Produkte die Komponenten des dynamischen Aktionsmomentes $\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}$ sind, und der Ausdruck des Drehungsmomentes wird

$$(d) \quad \begin{aligned} L &= -\{\dot{\gamma} \bar{G} - \dot{\beta} \bar{H}\} \\ M &= -\{\dot{\alpha} \bar{H} - \dot{\gamma} \bar{F}\} \\ N &= -\{\dot{\beta} \bar{F} - \dot{\alpha} \bar{G}\}. \end{aligned}$$

Drückt man $\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}$ durch die Resultante \bar{S} und die Richtungskosinusse, und ebenso $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ durch die Resultante $\dot{\sigma}$ und die Richtungskosinusse aus, so findet man als Ausdruck dieses Drehungsmomentes

$$(e) \quad \dot{\sigma} \bar{S} \sin(\dot{\sigma}, \bar{S}),$$

wenn $(\dot{\sigma}, \bar{S})$ der Winkel zwischen der Achse des Kugelpaares und der Fortschrittingsrichtung des Parallelstromes ist. Das Kugelpaar wird sich also in der Weise drehen, daß dieser Winkel zunimmt, und das Gleichgewicht wird eintreten, wenn sein Aktionsmoment dem Parallelstrome entgegengesetzt gerichtet ist. Das Drehungsmoment ist durch die Figur 35 a illustriert, für den Fall, daß das Aktionsmoment des Kugelpaares senkrecht zum Parallelstrome ist. Daß das Drehungsmoment, genau wie die jede Kugel angreifende Kraft, im Falle synchroner Schwingungen einen von Null verschiedenen Mittelwert haben wird, ist unmittelbar klar. Das mittlere Drehungsmoment wird durch die Formeln (d) dargestellt, wenn man \bar{F} , \bar{G} , \bar{H} , $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ als quadratische Mittelwerte interpretiert.

Superponiert man dem Parallelfelde ein Deformationsfeld mit Feldcentrum im Mittelpunkte zwischen beiden Kugeln, so wird dadurch kein neuer Beitrag zu diesem Drehungsmomente gegeben, da



Fig. 35, a und b. Drehung eines pulsierenden Kugelpaares (a) oder einer oscillierenden Kugel (b) im oscillierenden Parallelstrome.

dabei die beiden volumändernden Kugeln durch gleiche und gleichgerichtete Kräfte angegriffen werden (vergl. Figur 33 b). Ist weiter der Abstand zwischen den Kugeln hinlänglich klein, so kann man auch von dem eventuellen Einflusse der höheren Deformationsfelder absehen, und (d) oder (c) als Ausdruck desjenigen Drehungsmomentes betrachten, welches ein infinitesimales volumänderndes Kugelpaar in einem beliebigen Strome erleidet.

139. Die Möglichkeit der Drehung einer fortschreitenden Kugel.

— Das Resultat, daß das volumändernde Kugelpaar von dem oben bestimmten Drehungsmomente angegriffen wird, enthält nichts Überraschendes. Will man aber aus der Analogie einer fortschreitenden Kugel mit einem volumändernden Kugelpaar schließen, daß auch die fortschreitende Kugel gedreht werden wird, so liegt der

Einwand nahe, daß die hydrodynamische Druckkraft im Mittelpunkte der Kugel angreift, so daß kein Drehungsmoment und folglich auch keine Drehung zu stande kommen kann.

Dazu ist zunächst zu bemerken, daß auch die zwei pulsierenden Kugeln nicht selbst gedreht zu werden brauchen. Nur ihre Verbindungslinie wird notwendig infolge der Ortsveränderungen der Kugeln gedreht. Sind sie aber starr miteinander verbunden, so muß mit der Drehung der Verbindungslinie auch eine wirkliche Drehung der Kugeln eintreten.

Eine wirkliche Drehung der fortschreitenden Kugel als primäre Erscheinung dürfen wir deshalb auch nicht erwarten. Wenn aber die Richtung der Geschwindigkeit (a , b , c) der Kugel mit der Richtung der hydrodynamischen Druckkraft nicht zusammenfällt, so wird diese Kraft eine Deviation der Fortschreitungsrichtung der Kugel zu erzeugen suchen, und die Bahn der Kugel wird sich krümmen. Das Aktionsmoment der Kugel erleidet dann eine Richtungsveränderung, genau wie das Aktionsmoment des volumändernden Kugelpaares, ohne daß noch die Kugel selbst sich zu drehen braucht. Liegen synchrone Schwingungen vor mit ursprünglich geradlinigen Oscillationen der Kugel um ein festes Oscillationscentrum, so wird eine immer fortgesetzte Krümmung der Bahn eine Drehung der Oscillationsrichtung erzeugen, wobei der Mittelpunkt der Kugel die bekannte Bahn des FOUCAULT'schen Pendels durchläuft. Dieses wird genau der Drehung der Verbindungslinie des pulsierenden Kugelpaares ohne gleichzeitige Drehung der Kugeln selbst entsprechen.

Ist jetzt die Kugel nicht mehr völlig frei, sondern so befestigt, daß sie auf einer um das feste Oscillationscentrum drehbaren Stange gleitet, so wird sie keine krumme Bahn beschreiben können, ohne sich mit der Stange zu drehen. Die Drehung beruht dann darauf, daß die Kugel nicht frei, sondern mit einem äußeren Systeme verbunden ist. Ein innerer, in der Kugel verborgener Mechanismus wird aber dasselbe Resultat haben können. Denken wir uns, wie früher (43), die Kugel aus einer Kugelschale bestehend, welche mit einem schweren, inneren Kern in elastischer Verbindung steht, so daß Kugelschale und Kern entgegengesetzt oscillieren können. Der Mittelpunkt der Kugelschale, welcher der Angriffspunkt der hydrodynamischen Druckkraft ist, wird dann um den ruhenden Schwerpunkt oscillieren, so daß die hydrodynamische Druckkraft ein Moment in Bezug auf den Schwerpunkt haben wird. Dieses Moment wird die Drehung veranlassen.

140. Inducierendes und energetisches Drehungsmoment. — Um die somit möglichen Drehungen zu studieren, richten wir unsere Aufmerksamkeit auf die Kugel in der Lage a, b, c , und bilden die Komponenten L, M, N des Drehungsmomentes der hydrodynamischen Druckkraft in Bezug auf den Punkt a_0, b_0, c_0 , in dem sich der Mittelpunkt der Kugel einen Augenblick früher befand. Also:

$$\begin{aligned} L &= Z(b - b_0) - Y(c - c_0) \\ (a) \quad M &= X(c - c_0) - Z(a - a_0) \\ N &= Y(a - a_0) - X(b - b_0). \end{aligned}$$

Wir betrachten nur den Fall von Schwingungen mit kleiner Amplitude, wobei die Kugel um die mittlere Lage a_0, b_0, c_0 oscilliert, während gleichzeitig der umgebende Strom eine oscillierende Bewegung hat. Wir können von Anfang an von dem Einflusse der Energiekraft absehen, welche nach dem Satze 124 im Vergleiche zu der Induktionskraft verschwindend klein ist.

Wir setzen also in (a) die Ausdrücke 90 (b) der Komponenten der hydrodynamischen Induktionskraft ein. Die erste Komponente des Drehungsmomentes wird dann

$$L = -q \left\{ (b - b_0) \frac{d}{dt} \left(E \left(\frac{1}{2} \dot{c} - \frac{3}{2} \dot{\gamma} \right) \right) - (c - c_0) \frac{d}{dt} \left(E \left(\frac{1}{2} \dot{b} - \frac{3}{2} \dot{\beta} \right) \right) \right\}.$$

Den Ausdruck rechts können wir umformen, indem wir eine totale Ableitung nach der Zeit ausscheiden. Wir bemerken dabei, daß a_0, b_0, c_0 von der Zeit unabhängig sind, und finden leicht

$$\begin{aligned} L &= -q \frac{d}{dt} \left\{ E \left[\left(\frac{1}{2} \dot{c} - \frac{3}{2} \dot{\gamma} \right) (b - b_0) - \left(\frac{1}{2} \dot{b} - \frac{3}{2} \dot{\beta} \right) (c - c_0) \right] \right\} \\ &\quad - \frac{3}{2} q E (\dot{\gamma} \dot{b} - \dot{\beta} \dot{c}). \end{aligned}$$

Die Komponenten M und N kann man durch cyklische Vertauschung bilden.

Wir zerlegen jetzt dieses Drehungsmoment nach demselben Princip, nach welchem wir in 90 die hydrodynamische Druckkraft (X, Y, Z) zerlegt haben, nämlich

$$\begin{aligned} L &= L_i + L_e \\ (b) \quad M &= M_i + M_e \\ N &= N_i + N_e, \end{aligned}$$

wo

$$L_i = -q \frac{d}{dt} \left\{ E \left[\left(\frac{1}{2} \dot{c} - \frac{3}{2} \dot{\gamma} \right) (\dot{b} - b_0) - \left(\frac{1}{2} \dot{b} - \frac{3}{2} \dot{\beta} \right) (c - c_0) \right] \right\}$$

$$(c) \quad M_i = -q \frac{d}{dt} \left\{ E \left[\left(\frac{1}{2} \dot{a} - \frac{3}{2} \dot{\alpha} \right) (c - c_0) - \left(\frac{1}{2} \dot{c} - \frac{3}{2} \dot{\gamma} \right) (a - a_0) \right] \right\}$$

$$N_i = -q \frac{d}{dt} \left\{ E \left[\left(\frac{1}{2} \dot{b} - \frac{3}{2} \dot{\beta} \right) (a - a_0) - \left(\frac{1}{2} \dot{a} - \frac{3}{2} \dot{\alpha} \right) (b - b_0) \right] \right\}$$

und

$$L_e = -\frac{3}{2} q E (\dot{\gamma} \dot{b} - \dot{\beta} \dot{c})$$

$$(d) \quad M_e = -\frac{3}{2} q E (\dot{\alpha} \dot{c} - \dot{\gamma} \dot{a})$$

$$N_e = -\frac{3}{2} q E (\dot{\beta} \dot{a} - \dot{\alpha} \dot{b}).$$

(L_i, M_i, N_i) werden wir das inducierende, (L_e, M_e, N_e) das energetische Drehungsmoment nennen.

Auf das inducierende und das energetische Drehungsmoment können wir dieselben Sätze unmittelbar anwenden, die wir in dem sechsten Abschnitte dieses Teiles für die inducierenden und die energetischen Kräfte aufgestellt haben. Das inducierende Drehungsmoment wird also im allgemeinen die gröfsere Intensität haben; es wird aber periodisch mit dem Mittelwerte Null sein. Folglich hat nur das energetische das Vermögen, Drehungen dauernder Natur zu erzeugen, so dafs wir uns nur mit diesem genauer zu beschäftigen brauchen. Dabei können wir entweder (L_e, M_e, N_e) seine primäre Bedeutung lassen, als Ausdruck des in der Zeit veränderlichen Drehungsmomentes, durch das die Bahn der oscillierenden Kugel gekrümmt, oder die Kugel selbst gedreht wird, oder wir können den Fall synchroner Schwingungen voraussetzen, $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ als quadratische Mittelwerte interpretieren, und (L_e, M_e, N_e) als das von der Zeit unabhängige mittlere Drehungsmoment betrachten.

141. Verschiedene Formen des energetischen Drehungsmomentes.

— Man bemerkt leicht, dafs die Formeln 140 (d) des energetischen Drehungsmomentes auch in der Form

$$L_e = -\frac{3}{2} q E \left\{ (\dot{b} - \dot{\beta}) \dot{\gamma} - (\dot{c} - \dot{\gamma}) \dot{\beta} \right\}$$

$$(a) \quad M_e = -\frac{3}{2} q E \left\{ (\dot{c} - \dot{\gamma}) \dot{\alpha} - (\dot{a} - \dot{\alpha}) \dot{\gamma} \right\}$$

$$N_e = -\frac{3}{2} q E \left\{ (\dot{a} - \dot{\alpha}) \dot{\beta} - (\dot{b} - \dot{\beta}) \dot{\alpha} \right\}$$

geschrieben werden können. Führen wir hier nach **130** (b) das dynamische Aktionsmoment der Kugel ein, so werden

$$\begin{aligned} L_e &= -\{\dot{\gamma} \bar{G} - \dot{\beta} \bar{H}\} \\ (b) \quad M_e &= -\{\dot{\alpha} \bar{H} - \dot{\gamma} \bar{F}\} \\ N_e &= -\{\dot{\beta} \bar{F} - \dot{\alpha} \bar{G}\}. \end{aligned}$$

Diese Formeln sind mit den Formeln **138** (d) identisch. Also:

Die oscillierende Kugel und das äquivalente pulsierende Kugelpaar werden im oscillierenden Strome von demselben energetischen Drehungsmomente angegriffen.

Wir können also für dieses Drehungsmoment sofort den einfachen Ausdruck

$$(c) \quad \dot{\sigma} \bar{S} \sin(\dot{\sigma}, \bar{S})$$

aufstellen, wo wir unter $(\dot{\sigma}, \bar{S})$ immer den zwischen \bar{S} und $\dot{\sigma}$ eingeschlossenen konkaven Winkel verstehen, den wir gleichzeitig immer als positiv betrachten können. Das Vorzeichen ist dadurch gegeben, daß das Drehungsmoment diesen Winkel zu vergrößern sucht.

142. Permanentes und temporäres Drehungsmoment. -- Das temporäre Aktionsmoment $(\bar{F}_t, \bar{G}_t, \bar{H}_t)$ einer Kugel ist proportional der Geschwindigkeit $(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$ des Stromes. Die Substitution der Werte des temporären Aktionsmomentes **121** (f) in den Formeln **141** (b) des energetischen Drehungsmomentes giebt deshalb das Resultat

$$L_e = M_e = N_e = 0,$$

wie man auch sofort daraus schließen kann, daß im Ausdrucke **141** (c) der Winkel $(\dot{\sigma}, \bar{S}_t)$ zwischen dem temporärem Aktionsmomente und der Geschwindigkeit im Felde identisch Null ist. Also:

Es wirkt kein energetisches Drehungsmoment temporärer Natur auf die Kugel.

Zerlegt man deshalb in den allgemeinen Formeln **141** (b) das aktuelle Aktionsmoment in das permanente und das temporäre Partialmoment, so scheidet sich ein temporäres Drehungsmoment aus, welches identisch Null ist. Die Drehung der Kugel ist deshalb von dem Vorhandensein eines permanenten Aktionsmomentes abhängig und läßt sich durch dieses allein ausdrücken:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad L_e &= -\{\dot{\gamma} \bar{G}_p - \dot{\beta} \bar{H}_p\} \\
 M_e &= -\{\dot{\alpha} \bar{H}_p - \dot{\gamma} \bar{F}_p\} \\
 N_e &= -\{\dot{\beta} \bar{F}_p - \dot{\alpha} \bar{G}_p\}.
 \end{aligned}$$

Der Formel (a) entsprechend erhalten wir weiter als Wert des Drehungsmomentes

$$(b) \quad \dot{\sigma} \bar{S}_p \sin \theta,$$

wo θ der zwischen permanentem Aktionsmoment und Geschwindigkeit $\dot{\sigma}$ des Einfallsstromes eingeschlossene Winkel ist. Also:

(A) *Das energetische Drehungsmoment ist gleich dem Produkte des permanenten Aktionsmomentes in die Geschwindigkeit der Flüssigkeit, multipliziert mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels, und sucht diesen Winkel zu vergrößern.*

Das Drehungsmoment wird in zwei Lagen Null, nämlich wenn der Winkel Null ist und die permanenten Oscillationen der Kugel mit dem Strome verlaufen, und wenn der Winkel gleich π ist, so daß die Oscillationen der Kugel gegen den Strom gerichtet sind. Im ersten Falle herrscht labiles, im zweiten stabiles Gleichgewicht. Das Drehungsmoment hat seinen größten Wert, wenn die permanenten Oscillationen der Kugel senkrecht zu den Stromlinien des Feldes gerichtet sind (Figur 35b). Man bemerkt auch sofort, daß die resultierende Drehung der Kugel immer einen Zuwachs, und zwar einen reellen Zuwachs der Konfliktgeschwindigkeit zur Folge hat. Diese Geschwindigkeit hat in der labilen Gleichgewichtslage ihr Minimum und in der stabilen ihr Maximum. Man findet also unter Vergleich mit 131 (B):

(B) *Die Drehung der Kugel erfolgt genau wie die translatorische Verschiebung derselben nach der Regel von dem virtuellen Zuwachse der Konfliktgeschwindigkeit.*

Schreiben wir schließlic

$$(c) \quad \Psi_p = -\dot{\sigma} \bar{S}_p \cos \theta,$$

so ist

$$(d) \quad \frac{\partial \Psi_p}{\partial \theta} = \dot{\sigma} \bar{S}_p \sin \theta.$$

Hier ist Ψ_p die schon früher [133 (e)] eingeführte Kräftefunktion der permanenten Energiekraft. Also:

(C) *Das energetische Drehungsmoment läßt sich als eine partielle Ableitung nach dem Drehungswinkel von derselben Kräftefunktion darstellen, deren Ableitungen längs den Koordinatenachsen die Komponenten der permanenten Energiekraft geben.*

143. Die Bewegung der oscillierenden Kugel in damit synchron oscillierendem Strome. — Wir sind jetzt im stande, unsere Resultate über die Bewegung der oscillierenden Kugel in damit synchron oscillierendem Strome zu vervollständigen.

Wenn die Kugel nur temporäre Oscillationen besitzt, haben wir nichts Neues hinzuzufügen. Die Oscillationen werden dann immer in der Stromrichtung erfolgen, und die progressive Bewegung in der Richtung zunehmender oder abnehmender Energie.

Besitzt dagegen die Kugel permanente Oscillationen, so werden diejenigen in 132 beschriebenen Bewegungen, wo die Oscillationsrichtung der Kugel nicht mit derjenigen des Stromes zusammenfällt, immer von einer gleichzeitigen Drehung der Oscillationsrichtung der Kugel begleitet sein, sofern man nicht durch äußere Verbindungen diese Drehung verhindert.

Oscilliert die Kugel gerade gegen den Strom, so befindet sie sich der Drehung gegenüber in stabiler Lage, und die erfolgenden Bewegungen der Kugel (Figur 34a und c) in der Richtung zunehmender Stromintensität werden stabile Bewegungen.

Oscilliert die Kugel mit dem Strome, so befindet sie sich der Drehung gegenüber in instabiler Lage. Die in den Figuren 34b und d angegebene Bewegung der Kugel in der Richtung abnehmender Stromintensität wird dann eine instabile. Denn durch die geringste Störung wird die Kugel aus der instabilen Lage zu der stabilen gedreht werden, um nachher in der Richtung zunehmender Stromintensität sich zu bewegen.

Hat deshalb eine Kugel selbständige Oscillationen, und ist sie frei, sich zu drehen und sich translatorisch zu bewegen, und sehen wir von dem unwahrscheinlichen Falle ab, daß die instabile Bewegung eintritt, so wird die Bewegung folgendermaßen verlaufen;

Die Kugel wird sich drehen, bis ihre Oscillationen denjenigen des Stromes entgegengesetzt sind, und sich nachher translatorisch in der Richtung zunehmender Stromintensität bewegen.

Neunter Abschnitt.

Darstellung der Energiekraft und des energetischen Drehungsmomentes durch Summen von Elementarkräften.

144. Totale Druckkraft und elementare Druckkräfte. — Die inducierende und die energetische Druckkraft, welche im Mittelpunkt der Kugel angreifen, und deren Eigenschaften wir studiert haben, sind nicht die wirklich auftretenden Kräfte, sondern nur Bilder, mit deren Hilfe wir leichter gewisse Gesetze der Bewegung der Kugel beschreiben können, als bei der unmittelbaren Betrachtung der wirklich auf der Oberfläche der Kugel auftretenden Drucke. Anstatt des Bildes von einer einzigen im Mittelpunkte der Kugel angreifenden Kraft können wir mit gleichem Recht das Bild eines Systems von Elementarkräften benutzen, welche jedes Volumelement und jedes Flächenelement der Kugel angreifen. Dieses System von Elementarkräften ist nicht eindeutig bestimmt durch die einzige Bedingung, daß sie dieselbe Bewegung der Kugel erzeugen sollen wie die früher studierte, im Mittelpunkt der Kugel angreifende Kraft, sondern man kann mehrere Systeme von solchen Kräften angeben. Vollständig bestimmt würde die Aufgabe erst dann werden, wenn wir explicite die Kugel als ein elastisches oder flüssiges Kontinuum behandeln, den Druck in jedem Punkte des Innern derselben studieren und dadurch die Druckkräfte gegen die einzelnen Volumelemente bestimmen.

Zur Lösung der Aufgabe in dieser vollkommen bestimmten Form sind wir nicht vorbereitet. Wir können aber leicht mehrere äquivalente Systeme von Elementarkräften angeben, welche die verlangte Eigenschaft haben, die Kugel als ein Ganzes in derselben Weise zu bewegen, wie die oben studierten, im Mittelpunkte der Kugel angreifenden Kräfte. Das Hauptinteresse wird sich dabei auf die einfache Form der gefundenen Elementarkräfte und auf die einfachen Beziehungen derselben zu den Stromfeldern richten.

Wir werden dabei nicht die Induktionskraft, sondern nur die Energiekraft und das energetische Drehungsmoment in Betracht ziehen.

145. Die Energiekraft gegen die volumändernde und fortschreitende Kugel im Parallelfelde. — Das im Ausdrucke der Energiekraft gegen die volumändernde Kugel auftretende Volumänderungs-

moment \bar{E} der Kugel haben wir in 104 (d) als die Summe aller kubischen Divergenzen \bar{e} und aller Flächendivergenzen \bar{e}' der Feldintensität definiert, oder wie wir sagen können, als die Summe aller kubischen und flächenhaften Aktionsdichten. Also:

$$(a) \quad \bar{E} = \int \bar{e} d\tau + \int \bar{e}' d\sigma.$$

Ob wir in dem letzten Integral nur die von der Expansionsbewegung der Kugel abhängige Partialschicht mit der konstanten Dichte \bar{e}'_0 berücksichtigen oder zugleich die von der möglichen Translationsbewegung der Kugel herrührende Partialschicht mit der Dichte \bar{e}'_1 mitnehmen, ist für den Wert von \bar{E} gleichgültig (118).

Setzen wir den Wert (a) des Volumänderungsmomentes in die Ausdrücke 129 (a) der Komponenten der Energiekraft gegen eine volumändernde Kugel ein, und beachten, daß $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ Konstanten sind, so lassen sich die Ausdrücke dieser Kraftkomponenten in der Form

$$\begin{aligned} X_e &= - \int \bar{e} \dot{\alpha} d\tau - \int \bar{e}' \dot{\alpha} d\sigma \\ (b) \quad Y_e &= - \int \bar{e} \dot{\beta} d\tau - \int \bar{e}' \dot{\beta} d\sigma \\ Z_e &= - \int \bar{e} \dot{\gamma} d\tau - \int \bar{e}' \dot{\gamma} d\sigma \end{aligned}$$

schreiben. Die Kraft (X_e , Y_e , Z_e) wird also als eine Summe von Elementarkräften dargestellt, welche jedes Volumelement und jedes Oberflächenelement der Kugel angreifen, und deren auf die Einheit des Volumens oder der Fläche bezogener Betrag die Komponenten $-\bar{e}\dot{\alpha}$, $-\bar{e}\dot{\beta}$, $-\bar{e}\dot{\gamma}$ beziehungsweise $-\bar{e}'\dot{\alpha}$, $-\bar{e}'\dot{\beta}$, $-\bar{e}'\dot{\gamma}$ hat. Die Elementarkräfte sind also immer das negative Produkt der kubischen oder flächenhaften Aktionsdichten \bar{e} oder \bar{e}' in die Geschwindigkeit des Einfallsstromes.

146. Energiekraft gegen die fortschreitende Kugel im beliebigen Felde. — Wir betrachten jetzt die Kraft gegen die fortschreitende Kugel unveränderlichen Volumens.

Die Komponenten \bar{F} , \bar{G} , \bar{H} des Aktionsmomentes sind die Produkte der entsprechenden Aktionsintensitäten \bar{f} , \bar{g} , \bar{h} in das Volumen E der Kugel (118). Da die Aktionsintensitäten im ganzen Volumen der Kugel konstant sind, lassen sich die Komponenten der Aktionsmomente auch durch die Integrale

$$(a) \quad \bar{F} = \int \bar{f} d\tau, \quad \bar{G} = \int \bar{g} d\tau, \quad \bar{H} = \int \bar{h} d\tau$$

ausdrücken, wo die Integration über das ganze Volumen der Kugel auszudehnen ist.

Wegen der Konstanz der Größen $\dot{\alpha}_a, \dot{\alpha}_\beta, \dot{\alpha}_\gamma$ läßt sich die erste Komponente **130**(a) der Energiekraft gegen die fortschreitende Kugel, nach Einführung der Werte (a) der Komponenten des Aktionsmomentes, in der Form

$$(b) \quad X_e = - \int \left\{ \dot{\alpha}_a \bar{f} + \dot{\alpha}_\beta \bar{g} + \dot{\alpha}_\gamma \bar{h} \right\} d\tau$$

schreiben. $\dot{\alpha}_a, \dot{\alpha}_\beta, \dot{\alpha}_\gamma$ stellen die Werte derjenigen zweiten Ableitungen dar, welche das Potential des ursprünglichen Stromes im Punkt a, b, c hat (**53**). Sind u, v, w die ersten Ableitungen des Potentials nach den Koordinaten, oder die Geschwindigkeitskomponenten des Stromes, so ist also

$$\dot{\alpha}_a = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=a, y=b, z=c}, \quad \dot{\alpha}_\beta = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{x=a, y=b, z=c}, \quad \dot{\alpha}_\gamma = \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{x=a, y=b, z=c}.$$

Wenn wir aber anstatt dieser Konstanten die von Punkt zu Punkt veränderlichen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ in das Integral (b) einführen, so wird der Wert dieses Integrals dadurch nicht geändert. Denn $\frac{\partial u}{\partial x}$ kann um den Punkt a, b, c als Entwicklungscentrum nach räumlichen Kugelfunktionen entwickelt werden, wobei $\dot{\alpha}_a$ das erste Entwicklungsglied, oder die räumliche Kugelfunktion der Ordnung Null wird. Da der Faktor \bar{f} konstant ist, wird nach dem Satz **82**(c) nur dieses erste Glied im Integral (b) einen von Null verschiedenen Wert geben. Die gleiche Überlegung läßt sich in Bezug auf $\frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial w}{\partial z}$ anstellen. Die Kraftkomponente X_e und die entsprechenden Komponenten Y_e und Z_e lassen sich also durch die Integrale

$$(c) \quad \begin{aligned} X_e &= - \int \left\{ \bar{f} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{g} \frac{\partial u}{\partial y} + \bar{h} \frac{\partial u}{\partial z} \right\} d\tau \\ Y_e &= - \int \left\{ \bar{f} \frac{\partial v}{\partial x} + \bar{g} \frac{\partial v}{\partial y} + \bar{h} \frac{\partial v}{\partial z} \right\} d\tau \\ Z_e &= - \int \left\{ \bar{f} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{g} \frac{\partial w}{\partial y} + \bar{h} \frac{\partial w}{\partial z} \right\} d\tau \end{aligned}$$

darstellen.

Die Energiekraft läßt sich also in diesem Falle durch Elementarkräfte ausdrücken, welche alle Volumelemente der Kugel angreifen, und deren auf die Volumeinheit bezogener Betrag die Komponenten

$$(d) \quad \begin{aligned} & - \left\{ \bar{f} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{g} \frac{\partial u}{\partial y} + \bar{h} \frac{\partial u}{\partial z} \right\} \\ & - \left\{ \bar{f} \frac{\partial v}{\partial x} + \bar{g} \frac{\partial v}{\partial y} + \bar{h} \frac{\partial v}{\partial z} \right\} \\ & - \left\{ \bar{f} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{g} \frac{\partial w}{\partial y} + \bar{h} \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \end{aligned}$$

hat, wo $\bar{f}, \bar{g}, \bar{h}$ die Komponenten der Aktionsintensität innerhalb der Kugel sind, und u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten im ursprünglichen, von dem Vorhandensein der Kugel noch nicht gestörten Strom darstellen.

147. Zweite Form der Energiekraft gegen die fortschreitende Kugel. — In dem Integral 146 (b) können wir, da sämtliche Größen unter dem Integralzeichen konstant sind, das Volumelement der Kugel in einer beliebigen der Formen

$$(a) \quad d\tau = (x' - a) \frac{x' - a}{d} d\sigma = (y' - b) \frac{y' - b}{d} d\sigma = (z' - c) \frac{z' - c}{d} d\sigma$$

schreiben. Benützen wir im ersten Glied die erste, im zweiten die zweite und im dritten die dritte dieser Formen, so läßt sich das Integral sofort als das folgende Oberflächenintegral schreiben

$$(b) \quad X_s = - \int \left\{ \alpha_a (x' - a) \cdot \bar{f} \frac{x' - a}{d} + \alpha_\beta (y' - b) \cdot \bar{g} \frac{y' - b}{d} + \alpha_\gamma (z' - c) \cdot \bar{h} \frac{z' - c}{d} \right\} d\sigma.$$

Wir bemerken, daß

$$\bar{e}'_1 = \bar{f} \frac{x' - a}{d} + \bar{g} \frac{y' - b}{d} + \bar{h} \frac{z' - c}{d}$$

die Dichte der Aktionsschicht auf die Oberfläche der Kugel darstellt (118). Das Integral wird seinen Wert unverändert beibehalten, wenn wir im ersten Glied $\bar{f} \frac{x' - a}{d}$, im zweiten Glied $\bar{g} \frac{y' - b}{d}$, im dritten $\bar{h} \frac{z' - c}{d}$ durch \bar{e}'_1 ersetzen. Denn die dadurch neu hinzugekommenen Glieder haben nicht die Form 83 (b), welche alle von

Null verschiedenen Oberflächenintegrale haben müssen. \vec{e}' scheidet sich dann als gemeinschaftlicher Faktor aus, und innerhalb der Parenthese bleibt

$$u'_1 = \dot{\alpha}_\alpha (x' - a) + \dot{\alpha}_\beta (y' - b) + \dot{\alpha}_\gamma (z' - c)$$

stehen. Dies stellt die x -Komponente derjenigen Geschwindigkeit dar, welche das Deformationsfeld des Einfallsstromes im Punkt x', y', z' hat, wenn das Potential dieses Stromes um den Punkt a, b, c als Feldzentrum entwickelt wird. Unter dem Integralzeichen tritt also einfach das Produkt $\vec{e}'_1 u'_1$ auf, wo jeder Faktor eine Kugelflächenfunktion der Ordnung Eins ist. Jetzt können wir aber sofort die dem Deformationsfelde angehörige Geschwindigkeit u'_1 durch die totale Geschwindigkeit u des Feldes ersetzen. Denn alle dadurch hinzugefügten Glieder sind Kugelflächenfunktionen von anderer als der ersten Ordnung, und werden nach Multiplikation mit \vec{e}'_1 und Integration über die Kugelfläche das Resultat Null geben.

Wir können deshalb die x -Komponente der Kraft, und nach Symmetrie gleichzeitig die y - und z -Komponenten in der Form

$$\begin{aligned} X_e &= - \int \vec{e}'_1 u' d\sigma \\ (c) \quad Y_e &= - \int \vec{e}'_1 v' d\sigma \\ Z_e &= - \int \vec{e}'_1 w' d\sigma \end{aligned}$$

schreiben. Hier wird die Kraft als eine Summe von Elementarkräften dargestellt, welche nur auf der Oberfläche der Kugel wirken, und welche dieselbe Form haben, wie die gegen die volumändernde Kugel im Parallelfelde wirkenden Kräfte.

148. Gleichzeitig volumändernde und fortschreitende Kugel im beliebigen Felde. — Die Formeln 145 (b) bezogen sich auf die volumändernde Kugel im Parallelfelde. Die x -Komponente läßt sich auch

$$X_e = - \int \bar{e} \dot{\alpha} d\tau - \int \vec{e}'_0 \dot{\alpha} d\sigma$$

schreiben, da wir berechtigt sind, die Dichte \vec{e}' der wirklichen Schicht durch die konstante Dichte \vec{e}'_0 der auf der Volumänderung beruhenden Partialschicht zu ersetzen.

Wir denken uns jetzt, daß das ursprüngliche Stromfeld nicht mehr ein Parallelfeld, sondern ein beliebiges Potentialfeld ist, welches um den Punkt a, b, c als Feldcentrum entwickelt das Parallelfeld $(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$ enthält. Ersetzen wir nun in dem obigen Integral $\dot{\alpha}$ durch u , so werden die Integrale keine Wertveränderung erleiden. Denn im kubischen Integral werden die neuen Glieder nur Integrale von räumlichen Kugelfunktionen, im Flächenintegral Integrale von Kugelflächenfunktionen höherer Ordnungen als der Nullten geben, welche nach den Sätzen 82(B) und (C) verschwinden müssen. X_e wird deshalb auch

$$X_e = - \int \bar{e} u d\tau - \int \bar{e}'_0 u' d\sigma$$

geschrieben werden können.

Ist nun die Kugel in diesem Strome zugleich translatorisch bewegt, so wirkt die Kraft 147(a). Da $\bar{e}'_0 + \bar{e}'_1 = \bar{e}'$, ergibt sich durch Addition für die x -Komponente, und nach Symmetrie für die y - und z -Komponenten:

$$\begin{aligned} X_e &= - \int \bar{e} u d\tau - \int \bar{e}' u' d\sigma \\ (a) \quad Y_e &= - \int \bar{e} v d\tau - \int \bar{e}' v' d\sigma \\ Z_e &= - \int \bar{e} w d\tau - \int \bar{e}' w' d\sigma. \end{aligned}$$

Die hier auftretenden Elementarkräfte wirken teils im Innern der Kugel, und ihr auf die Volumeinheit bezogener Betrag hat die Komponenten $-\bar{e}u$, $-\bar{e}v$, $-\bar{e}w$. Teils wirken sie auf der Oberfläche der Kugel und haben einen auf die Flächeneinheit bezogenen Betrag, welcher durch die Komponenten $-\bar{e}'u'$, $-\bar{e}'v'$, $-\bar{e}'w'$ gegeben ist.

149. Erste Integralform des energetischen Drehungsmomentes. — Da $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ von den Koordinaten x, y, z unabhängige Größen sind, so können wir die Komponenten 141(b) des Drehungsmomentes unmittelbar als Volumintegrale schreiben, wenn wir $\vec{F}, \vec{G}, \vec{H}$ durch die Integrale 146(a) ausdrücken. Die erste Komponente wird dann

$$L_e = - \int (\bar{g} \dot{\gamma} - \bar{h} \dot{\beta}) d\tau.$$

Wegen des Satzes 82(C) können wir jetzt die von den Koordinaten

unabhängigen Geschwindigkeitskomponenten \dot{a} , \dot{b} , \dot{c} , welche der Einfallsstrom im Punkte $x = a$, $y = b$, $z = c$ hat, durch die von Punkt zu Punkt veränderlichen Geschwindigkeitskomponenten u , v , w dieses Stromes ersetzen. Wir können deshalb L_e und nach Symmetrie gleichzeitig M_e und N_e auch in der Form

$$\begin{aligned} L_e &= - \int \{ \bar{g} w - \bar{h} v \} d\tau \\ (a) \quad M_e &= - \int \{ \bar{h} u - \bar{f} w \} d\tau \\ N_e &= - \int \{ \bar{f} v - \bar{g} u \} d\tau \end{aligned}$$

schreiben. Das Drehungsmoment tritt hier als eine Summe von elementaren, jedes Volumelement angreifenden Drehungsmomenten auf, deren Betrag pro Volumeinheit die Komponenten

$$(b) \quad - \{ \bar{g} w - \bar{h} v \}, \quad - \{ \bar{h} u - \bar{f} w \}, \quad - \{ \bar{f} v - \bar{g} u \}$$

hat.

150. Zweite Integralform des energetischen Drehungsmomentes.

— Benutzt man die zweite und dritte Form 147(a) des Volumelementes $d\tau$, so läßt sich der erste der obigen Ausdrücke für L_e als das Flächenintegral

$$L_e = - \int \left\{ \bar{g} \frac{y' - b}{d} \cdot \dot{\gamma} (y' - b) - \bar{h} \frac{x' - c}{d} \cdot \dot{\beta} (x' - c) \right\} d\sigma$$

schreiben. Genau wie in dem Integral 147(b) können wir hier $\bar{g} \frac{y' - b}{d}$ und $\bar{h} \frac{x' - c}{d}$ durch \bar{e}'_1 ersetzen, wodurch die Integralform

$$L_e = - \int \left\{ \bar{e}'_1 \dot{\gamma} (y' - b) - \bar{e}'_1 \dot{\beta} (x' - c) \right\} d\sigma$$

entsteht.

$\bar{e}'_1 \dot{\gamma}$ und $\bar{e}'_1 \dot{\beta}$ sind Elementarkräfte derselben Natur, wie die, welche wir früher zur Darstellung der translatorisch bewegenden Kraft benutzt haben, und der gesamte Ausdruck unter dem Integralzeichen stellt das Moment einer solchen Elementarkraft in Bezug auf eine zur x -Achse parallele Achse durch das Centrum a, b, c der Kugel dar. Untersuchen wir jetzt, inwieweit wir im allgemeinsten Falle das Drehungsmoment als die Summe der elementaren Momente

aller kubischen und flächenhaften Aktionsdichten $\bar{\epsilon}$ und $\bar{\epsilon}'$ darstellen können.

Ist die Kugel volumändernd, so muß die auf der Kugelfläche konstante Aktionsdichte $\bar{\epsilon}'_0$ zu $\bar{\epsilon}'_1$ hinzugefügt werden. Offenbar wird dadurch der Wert des Integrals nicht geändert, da die mit einer Konstanten multiplizierten Kugelflächenfunktionen $y' - b$ und $x' - c$ das Flächenintegral Null haben. Da gleichzeitig die entsprechenden räumlichen Kugelfunktionen $y - b$ und $x - c$ innerhalb des Kugelvolumens das Integral Null haben, können wir unter dem Integralzeichen die Momente derjenigen Elementarkräfte $\bar{\epsilon} \dot{\gamma}$ und $\bar{\epsilon} \dot{\beta}$ hinzufügen, welche nach diesen Vorstellungen im Innern der Kugel angreifen. L_e kann also auch

$$(a) \quad L_e = - \int \left\{ \bar{\epsilon} \dot{\gamma} (y-b) - \bar{\epsilon} \dot{\beta} (x-c) \right\} d\tau - \int \left\{ \bar{\epsilon}' \dot{\gamma} (y'-b) - \bar{\epsilon}' \dot{\beta} (x'-c) \right\} d\sigma$$

geschrieben werden, wo jetzt sämtliche Aktionsdichten mitgenommen sind.

Jetzt denken wir uns die Konstanten $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$, welche die Geschwindigkeit des ursprünglichen Stromes im Punkte a, b, c darstellen, durch die von Punkt zu Punkt veränderlichen Geschwindigkeitskomponenten u, v, w ersetzt. Sind diese Größen nach räumlichen Kugelfunktionen in der Umgebung von a, b, c entwickelt, so wird L_e dasjenige Integral sein, welches die konstanten Glieder dieser Entwicklung enthält. Das Glied n^{ter} Ordnung wird ein Integral

$$(b) \quad - \int \bar{\epsilon} \left[w_n (y-b) - v_n (x-c) \right] d\tau - \int \bar{\epsilon} \left[w'_n (y'-b) - v'_n (x'-c) \right] d\sigma$$

veranlassen, wo v_n und w_n räumliche Kugelfunktionen der Ordnung n , und v'_n und w'_n die entsprechenden Kugelflächenfunktionen sind.

Infolge der Identität 86 (g) können wir jetzt

$$w_n (y-b) = \frac{r^2}{2n+1} \left\{ \frac{\partial w_n}{\partial y} - \frac{r^{2n+1}}{a^{2n+1}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{d^{2n+1}}{r^{2n+1}} w_n \right) \right\}$$

$$v_n (x-c) = \frac{r^2}{2n+1} \left\{ \frac{\partial v_n}{\partial x} - \frac{r^{2n+1}}{a^{2n+1}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d^{2n+1}}{r^{2n+1}} v_n \right) \right\}$$

schreiben, und hieraus ergibt sich unter Beachtung der Relation 6(a), welche die potentielle Natur der Bewegung ausdrückt:

$$w_n (y-b) - v_n (x-c) = - \frac{r^{2n+3}}{(2n+1) a^{2n+1}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{d^{2n+1}}{r^{2n+1}} w_n \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d^{2n+1}}{r^{2n+1}} v_n \right) \right\}.$$

Die Glieder rechts sind Produkte räumlicher Kugelfunktionen der Ordnung $n + 1$ in eine Potenz des Radiusvektor r . Im kubischen Integrale sollen diese Funktionen mit einer Konstante \bar{e} multipliziert und innerhalb des Kugelvolumens integriert werden, was nach dem Satze 82 (C) das Resultat Null geben muß, solange nicht $n + 1 = 0$, was nicht eintreffen kann, da n positiv ist. Nach der Substitution $r = d$, $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ erhält man rechts in (b) eine Summe von zwei Kugelflächenfunktionen der Ordnung $n + 1$. Im Flächenintegrale sollen sie mit \bar{e}' , also der Summe einer Kugelflächenfunktion nullter und einer solchen erster Ordnung, multipliziert werden. Wenn $n = 0$, enthält (b) Kugelflächenfunktionen der Ordnung 1, und dies giebt das Integral (a). Höhere Werte von n kommen dagegen nicht in Betracht. Das Integral (a) wird folglich seinen Wert unverändert beibehalten, wenn wir α, β, γ durch u, v, w ersetzen.

Die Komponenten des Drehungsmomentes lassen sich deshalb in der folgenden Form schreiben:

$$\begin{aligned}
 L_e &= - \int \{ \bar{e} w (y - b) - \bar{e} v (z - c) \} d\tau - \int \{ \bar{e}' w' (y' - b) - \bar{e}' v' (z' - c) \} d\sigma \\
 \text{(c) } M_e &= - \int \{ \bar{e} u (z - c) - \bar{e} w (x - a) \} d\tau - \int \{ \bar{e}' u' (z' - c) - \bar{e}' w' (x' - a) \} d\sigma \\
 N_e &= - \int \{ \bar{e} v (x - a) - \bar{e} u (y - b) \} d\tau - \int \{ \bar{e}' v' (x' - a) - \bar{e}' u' (y' - b) \} d\sigma.
 \end{aligned}$$

Hier stellen die Größen

$$\begin{aligned}
 & - \{ \bar{e} w (y - b) - \bar{e} v (z - c) \} & - \{ \bar{e}' w' (y' - b) - \bar{e}' v' (z' - c) \} \\
 \text{(d) } & - \{ \bar{e} u (z - c) - \bar{e} w (x - a) \} & - \{ \bar{e}' u' (z' - c) - \bar{e}' w' (x' - a) \} \\
 & - \{ \bar{e} v (x - a) - \bar{e} u (y - b) \} & - \{ \bar{e}' v' (x' - a) - \bar{e}' u' (y' - b) \}
 \end{aligned}$$

elementare Drehungsmomente in Bezug auf Achsen durch den Mittelpunkt der Kugel dar, und zwar sind es die Momente von eben den Kräften $(-\bar{e}u, -\bar{e}v, -\bar{e}w)$, $(-\bar{e}'u', -\bar{e}'v', -\bar{e}'w')$, durch welche wir oben (148), die Resultantkraft gegen die Kugel dargestellt haben.

151. Diskussion der Elementarkräfte. — Die unbestimmte Natur der Aufgabe, welche wir hier behandelt haben, hat sich auch in den erhaltenen Lösungen gezeigt. Denn für den Fall der fortschreitenden Kugel haben wir zwei äquivalente Integralausdrücke

für die translatorisch bewegende Kraft, und zwei äquivalente Integralausdrücke für das Drehungsmoment gefunden. Für die innere Mechanik der studierten Vorgänge sind deshalb die gefundenen Resultate bedeutungslos, und ihre Bedeutung liegt vorläufig nur in der einfachen und einheitlichen Form, auf die sie die Ausdrücke der Kräfte und der Drehungsmomente zu bringen gestatten.

Zu bemerken ist vor allem, daß die in diesen Kraftausdrücken auftretenden Aktionsintensitäten \bar{f} , \bar{g} , \bar{h} , und Aktionsdichten \bar{e} und \bar{e}' dieselben Größen sind, durch welche man das Potential des Feldintensitätsfeldes ausdrücken kann [vergl. 102(b), 103(d), 105(d), 113(d)].

Von den beiden Integralformen der Kraft und des Drehungsmomentes hat diejenige, die die Aktionsdichten \bar{e} und \bar{e}' enthält, insofern einen formellen Vorzug, als sie allgemein verwendbar ist, sei es, daß die Kugel volumändernde oder fortschreitende Bewegung hat. Die elementaren Kräfte haben dann die Komponenten $-\bar{e}u$, $-\bar{e}v$, $-\bar{e}w$ und $-\bar{e}'u'$, $-\bar{e}'v'$, $-\bar{e}'w'$, und das Resultat läßt sich folgendermaßen formulieren:

Die auf eine unter Volumänderung fortschreitende Kugel wirkende Energiekraft, beziehungsweise das energetische Drehungsmoment ist die Resultante, beziehungsweise das resultierende Drehungsmoment eines Systems von elementaren Kräften, welche man sich als die einzelnen Volumelemente und Oberflächenelemente der Kugel angreifend vorstellen kann, und deren Betrag pro Volum- oder Flächeneinheit das negativ genommene Produkt der vorhandenen Aktionsdichte in die Geschwindigkeit des Einfallstromes ist.

Erinnern wir uns an die Eigenschaften der Aktionsdichten \bar{e} und \bar{e}' , so sehen wir sofort, daß die gefundenen Elementarkräfte sehr verschieden verteilt sind, je nach den verschiedenen relativen Dichten von Kugel und Flüssigkeit. Ein Grenzfall ist besonders bemerkenswert. Ist die Dichte der Kugel gleich Null, so reduzieren sich die Elementarkräfte innerhalb der Kugel ebenfalls auf Null. Die Kraft und das Drehungsmoment werden dann ausschließlich durch Oberflächenintegrale ausgedrückt.

Vierter Teil.

Hydrodynamische Fernkräfte.

Erster Abschnitt.

Ursprung und erste Entwicklung der Bjerknes'schen Arbeiten.

152. **Übergang zur Mechanik des vollständigen Kugelsystems.** — Im zweiten, kinematischen Teile unserer Untersuchungen haben wir die Bewegung der Flüssigkeit bei gegebener Bewegung eines Systems von Kugeln untersucht, und im dritten haben wir ausführlich die dynamische Wechselwirkung einer Kugel und der umgebenden Flüssigkeit diskutiert. Die Elemente für die dynamische Diskussion der Bewegung des gesamten Kugelsystems sind dadurch gegeben, vorausgesetzt, daß wir uns auf solche Fälle beschränken, wo die gefundenen Ausdrücke für die hydrodynamische Druckkraft eine befriedigende Annäherung geben, was in jedem einzelnen Falle durch Anwendung des aufgestellten Kriteriums entschieden werden kann. Die Beschränkung wird im allgemeinen darin bestehen, daß der Abstand unter den Kugeln groß im Vergleiche zu den Radien sein muß. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, sind wir im stande, die Einflüsse oder die scheinbaren Fernkräfte zu studieren, welche die Kugeln unter Vermittelung der Flüssigkeit aufeinander ausüben.

Die Untersuchung dieser scheinbaren Fernkräfte hydrodynamischen Ursprunges war unser Hauptziel. Die Eigenschaften derselben werden wir im folgenden in systematischer Reihenfolge behandeln. Da aber diese Reihenfolge in den großen Zügen mit der historischen Reihenfolge in der Entwicklung dieser Unter-

suchungen zusammenfällt, werden wir die Gelegenheit benutzen, einige historische Erläuterungen über die Entstehung und Entwicklung der leitenden Ideen einzufügen.

153. Bewegung einer Kugel unveränderlichen Volumens in ursprünglich ruhender Flüssigkeit. — Um den ersten Ursprung der BJERKNES'schen Untersuchungen zu zeigen, kehren wir noch einmal zu dem einfachen Falle zurück, daß sich eine Kugel unveränderlichen Volumens in einer ursprünglich ruhenden Flüssigkeit bewegt, um die dabei erhaltenen Resultate von einer neuen Seite zu betrachten.

Die ganze hydrodynamische Druckkraft reduciert sich in diesem Falle auf die selbstinducierende Kraft in der einfachen Form 96 (b''). Führen wir die verdrängte Flüssigkeitsmasse

$$(a) \quad m = q E$$

ein, so wird der Ausdruck dieser Kraft

$$X_i = -\frac{1}{2} m \ddot{a}$$

$$(b) \quad Y_i = -\frac{1}{2} m \ddot{b}$$

$$Z_i = -\frac{1}{2} m \ddot{c}.$$

Die Bewegung der Kugel wird dann nach den folgenden Gleichungen verlaufen:

$$M \ddot{a} = -\frac{1}{2} m \ddot{a} + \mathfrak{X}$$

$$(c) \quad M \ddot{b} = -\frac{1}{2} m \ddot{b} + \mathfrak{Y}$$

$$M \ddot{c} = -\frac{1}{2} m \ddot{c} + \mathfrak{Z},$$

wenn $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die Komponenten einer fremden, im Mittelpunkte der Kugel angreifenden Kraft nicht hydrodynamischen Ursprungs sind. Diese Gleichungen lassen sich in die Form

$$(M + \frac{1}{2} m) \ddot{a} = \mathfrak{X}$$

$$(d) \quad (M + \frac{1}{2} m) \ddot{b} = \mathfrak{Y}$$

$$(M + \frac{1}{2} m) \ddot{c} = \mathfrak{Z}$$

umschreiben, und haben dann dieselbe Gestalt wie die Bewegungs-

gleichungen einer Kugel, welche sich im leeren Raume bewegt, und die Masse $M + \frac{1}{2}m$ hat. Wir finden also das folgende Resultat:

Die Bewegung einer Kugel in einer ursprünglich ruhenden inkompressiblen und reibungslosen Flüssigkeit wird genau so verlaufen, wie die Bewegung derselben Kugel im leeren Raume, wenn die Masse der Kugel um die halbe Masse des verdrängten Flüssigkeitsvolumens vergrößert wird.

Ein besonders wichtiger Specialfall hiervon ist in dem folgenden Satze enthalten:

Wenn sich die Kugel mit konstanter Geschwindigkeit durch die Flüssigkeit bewegt, wird sie keinen Widerstand erleiden. Sie wird sich genau so bewegen, wie eine Kugel im leeren Raume nach dem Trägheitsgesetze.

154. Dirichlet's Arbeiten. — Die Lösung dieses Problems von der Bewegung einer Kugel in einer Flüssigkeit hatte LEJEUNE-DIRICHLET, selbst mit den älteren Resultaten englischer Forscher unbekannt¹, im Jahre 1852 publiciert.² Doch hatte er das Resultat nicht in der oben gewählten Formulierung gegeben, denn anstatt der Vorstellung von einer scheinbaren Vergrößerung der trägen Masse der Kugel hatte er die Vorstellung von einer scheinbaren Verminderung der beschleunigenden Kraft benutzt.

In seinen Vorlesungen im Wintersemester 1855—56 an der Universität Göttingen: „Integration partieller Differentialgleichungen, und deren Anwendung auf physikalische und hydrodynamische Probleme“, trug er die Lösung des nahe verwandten Problems von einer ruhenden Kugel in einem Strome vor, und forderte seine Schüler auf, das mathematisch schwierigere Problem von der Bewegung des Ellipsoids anzugreifen.

Von DIRICHLET's Schülern löste SCHERING dieses Problem, und C. A. BJERKNES verallgemeinerte SCHERING's Lösung für den Fall,

¹ GREEN, Researches on the Vibrations of Pendulums in Fluid Media. Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Vol. 13. Read December 1833. Mathematical Papers p. 315. STOKES, On some cases of fluid motion, Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Vol. VIII, p. 105. Read May 1843. Mathematical and Physical Papers. Vol. I, p. 17.

² LEJEUNE-DIRICHLET, Über die Bewegung eines festen Körpers in einem inkompressiblen flüssigen Medium. Bericht über die Verhandlungen der Königl. Preussischen Akademie der Wissenschaften von 1852, S. 12. Werke Bd. II, S. 115.

dafs die Bewegung in einem Raume mit n -Dimensionen vor sich ginge. Doch erst viel später, nachdem CLEBSCH seine Lösung des Ellipsoidproblems schon längst publiciert hatte¹, wurden diese Resultate, in Verbindung mit weiteren Untersuchungen in dieser Richtung, von BJERKNES publiciert.²

DIRICHLET regte also seine Schüler zur Fortsetzung der Arbeit in mathematischer Richtung an. Ob er selbst mit seinen Untersuchungen physikalische Ziele verfolgt hat, darüber hat er sich nicht ausgesprochen. Wenn dies aber der Fall gewesen ist, so dürfte die zunächstliegende Vermutung die sein, dafs er die wichtige praktische Frage von den Gesetzen des Flüssigkeitswiderstandes, und eine mögliche, theoretische Ableitung des NEWTON'schen empirischen Gesetzes von der Proportionalität des Widerstandes mit dem Quadrat der Geschwindigkeit im Auge gehabt habe. Hat er aber dieses Ziel verfolgt, so mufs das beim ersten Anblick so überraschende Resultat von der widerstandslosen Bewegung der Kugel jedenfalls eine Enttäuschung gewesen sein.

155. Ursprung der Bjerknès'schen Arbeiten. — Wie erwähnt, nahm BJERKNES während seines Studienaufenthaltes in Göttingen an den von DIRICHLET veranlafsten mathematischen Arbeiten Teil. Aber gleichzeitig war doch bei ihm der Plan zur Fortsetzung dieser Arbeiten nach einer anderen Richtung hin entstanden.

Die Fernwirkungslehre stand um diese Zeit in ihrer höchsten Blüte, und eben von Göttingen war die letzte glänzende Leistung dieser Lehre, das WEBER'sche Gesetz, wenige Jahre vorher ausgegangen. Als Fremder war aber BJERKNES von der Denkweise der Göttinger Gelehrten weniger beeinflusst, und ausserdem war er schon frühe gegen die herrschende Fernwirkungslehre oppositionell gestimmt worden. Durch einen Zufall war ihm nämlich eine dänische Ausgabe von EULER's Briefen an eine deutsche Prinzessin³ in die Hände

¹ CLEBSCH, CRELLE's Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. 52, S. 103; Bd. 52, S. 287. 1856—57.

² C. A. BJERKNES, Geschichtliche Notizen über das DIRICHLET'sche Kugel- und Ellipsoidproblem, Göttinger Nachrichten, 9. Juli 1873; Verallgemeinerung des Problems von dem ruhenden Ellipsoid in einer bewegten unendlichen Flüssigkeit, Gött. Nachr., 9. Juli 1873; Verallgemeinerung des Problems von den Bewegungen, welche in einer ruhenden unelastischen Flüssigkeit die Bewegung eines Ellipsoids hervorbringt. Erster Aufsatz, Gött. Nachr., 17. Dezember 1873. Zweiter Aufsatz, Gött. Nachr., 3. Juni 1874.

³ Kopenhagen 1792.

gekommen, und das Lesen der Polemik, welche der große Forscher hier gegen die damals gerade zur Herrschaft gelangte Lehre von den Fernwirkungen führt, hatte auf ihn einen tiefen Eindruck gemacht.

Jetzt schien ihm das DIRICHLET'sche Resultat von der widerstandslosen Bewegung der Kugel eben für Fragen dieser Art von der größten Bedeutung zu sein.

Sind die Fernkräfte der Natur nur scheinbare Fernkräfte, so muß man die Existenz eines raumerfüllenden Mediums annehmen, welches die Wirkungen fortpflanzen kann. Gegen die Annahme eines solchen Mediums würde man aber sofort im Anschlusse an unsere alltäglichen Erfahrungen über Flüssigkeitswiderstand einwenden können, daß das Medium gegen die Bewegung der ponderablen Körper Widerstand leisten müßte, mit dem Erfolge, daß zuletzt jede Bewegung aufhören würde. NEWTON hatte besonders auch diese Frage im Auge, als er die Gesetze des Flüssigkeitswiderstandes untersuchte und das Resultat von dem dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionalen Widerstande fand. Mit offenkundiger Rücksicht auf die Kartesische Wirbeltheorie zieht er, allerdings mit einigem Vorbehalt, den Schluß, daß die Himmelsräume von jeder körperlichen Flüssigkeit frei sein müssen.¹ Für die Stellung, welche er selbst und noch mehr seine Nachfolger zur Undulationstheorie des Lichtes einnahmen, ist eben diese Frage von dem Flüssigkeitswiderstande von bedeutendem Einfluß gewesen.

Jetzt führte aber DIRICHLET's Untersuchung zu dem unerwarteten Resultate, daß, welche mechanische Ursache der Flüssigkeitswiderstand auch haben mag, das Auftreten eines solchen Widerstandes nicht eine Notwendigkeit ist: Das Trägheitsprinzip kann mit derselben Genauigkeit erfüllt bleiben, sei es, daß der Raum leer oder mit einem Medium erfüllt ist. Durch Überlegungen dieser Natur geleitet, faßte BJERKNES den Plan zur Fortsetzung der DIRICHLET'schen Untersuchungen in einer anderen Richtung als in der von dem Meister selbst angegebenen: das Ziel sollte nicht mehr ein mathematisches, sondern ein physikalisches und naturphilosophisches sein.

156. Stellung der Aufgabe von der Bewegung eines Systems von Kugeln mit veränderlichem Volumen. — Wenn das Medium vorhanden sein kann, ohne daß ein Widerspruch mit dem ersten Prin-

¹ Principia, Schlussbetrachtungen des siebenten Abschnittes des zweiten Buches.

zipe der Mechanik entsteht, so liegt die Frage nahe, ob nicht auch das Medium eine mehr aktive Rolle spielen und möglicherweise die Wirkungen veranlassen oder fortpflanzen könne, welche wir als Fernwirkungen beobachten. Wenn nicht nur eine Kugel, sondern mehrere Kugeln sich in der Flüssigkeit bewegen, schließt man schon nach dynamischem Gefühl, daß sie ihre Bewegungen gegenseitig beeinflussen müssen. Üben sie aber einen solchen Einfluß aus, so muß ein Beobachter, welcher die Flüssigkeit nicht sieht, scheinbare Fernwirkungen unter denselben wahrzunehmen glauben.

Die Eigenschaften dieser scheinbaren Fernkräfte mußten aber jetzt, nachdem DIRICHLET die Möglichkeit solcher Untersuchungen bewiesen hatte, zum Gegenstande exakter Forschungen gemacht werden können: Man brauchte zu diesem Zwecke nur das Problem von der Bewegung mehrerer Kugeln in der Flüssigkeit zu lösen. Dabei trat für BJERKNES besonders ein Gedanke in den Vordergrund: Wird ein Beobachter, welcher die Kugeln, nicht aber die Flüssigkeit sieht, finden, daß außer dem Trägheitsprinzip auch die anderen Prinzipien unserer gewöhnlichen Mechanik erfüllt sind? Das heißt: werden die zwischen den Kugeln wirkenden scheinbaren Fernkräfte diejenigen Eigenschaften besitzen, welche wir nach den NEWTON'schen Axiomen der Mechanik den Fernkräften beizulegen pflegen?

Neben dieser allgemeinen Frage mußte sich auch eine Frage speciellerer Natur aufdrängen: Wird es möglich sein, unter den hydrodynamischen Fernkräften solche aufzufinden, die den einzelnen Fernkräften der Natur ähnlich sind? Von selbst tritt dabei der Gedanke an die Schwerkraft und im allgemeinen an die nach dem NEWTON'schen Gesetze im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates des Abstandes wirkenden Kräfte in den Vordergrund. Zu solchen Kräften hoffte BJERKNES besonders zu gelangen durch eine Verallgemeinerung des Problems, wonach die einzelnen Kugeln des Kugelsystems nicht nur translatorische, sondern auch volumändernde Bewegungen haben sollten.

Die Lösung der somit definierten Aufgabe wurde nicht unmittelbar in Angriff genommen. Teils äußere Umstände, teils die Beschäftigung mit ihm näher liegenden Aufgaben mathematischer Natur traten dazwischen. Erst 1863 wurde der Anfang gemacht durch die Lösung der Aufgabe von der Bewegung einer einzigen Kugel veränderlichen Volumens in der Flüssigkeit (vergl. S. 53). Die Arbeiten wurden aber wieder während fünf Jahren durch Krankheit fast ganz unterbrochen, so daß er erst im Jahre 1868 im Besitze einer hin-

länglich allgemeinen Lösung des gestellten Problems war, um die erste Diskussion der allgemeinen Eigenschaften der hydrodynamischen Fernkräfte vorzunehmen¹, eine Diskussion, zu welcher wir jetzt in unserer Darstellung übergehen.

Zweiter Abschnitt.

Klassifikation der im Kugelsystem wirkenden Kräfte.

157. Lokale Kraft und scheinbare Fernkraft. — Die früher benutzte Zerlegung der hydrodynamischen Druckkraft in inducierende Kraft und energetische Kraft wird nicht mehr die fundamentale Zerlegung sein, wenn wir zu der Untersuchung der Bewegung des vollständigen Kugelsystems mit besonderer Rücksicht auf die dort auftretenden scheinbaren Fernkräfte übergehen. Die Zerlegung der Induktionskraft in die selbstinducierende und die fremdinducierende Partialkraft bleibt aber eine fundamentale. Die selbstinducierende Kraft wird also für sich ausgeschieden werden, während die fremdinducierenden und die energetischen Kräfte zusammen eine zweite Gruppe ausmachen werden.

Denn die selbstinducierende Kraft hängt nur von solchen Parametern ab, welche für die Eigenbewegung der Kugel charakteristisch sind. Die Bewegung des äußeren Stromes, und somit das Vorhandensein und die Bewegung der entfernten Kugeln haben aber keinen Einfluß auf den Wert dieser Kraft. Sie bleibt also eine rein lokale Kraft, welche von der Bewegung der einen betrachteten Kugel in Verbindung mit dem Vorhandensein der Flüssigkeit abhängt.

Im Ausdrücke der fremdinducierenden Kraft, ebenso wie in sämtlichen Gliedern der Energiekraft, treten dagegen außer den für die Kugel und ihre Bewegung charakteristischen Parametern zugleich solche Parameter auf, welche von der Bewegung im Einfallsstrome abhängen. Dieser Einfallsstrom besteht aber nur infolge des Vorhandenseins und der Bewegung der anderen Kugeln. Diese Kräfte

¹ C. A. BJERKNES: Om den samtidige Bevægelse af kugleformige Legemer i et inkompressibelt Fluidum. Forhandlingar ved de skandinaviske Naturforskere 10^{de} Møde i Christiania, vorgelegt 8. Juli 1868.

würden wegfallen, wenn man die anderen Kugeln entfernte, und wieder auftreten, wenn diese Kugel wieder in die Flüssigkeit eingebracht würden. Ein Beobachter, welcher diese Erscheinung wahrgenommen hätte, und nichts von dem Vorhandensein der Flüssigkeit wüßte, würde glauben, Wirkungen in die Ferne zwischen den Kugeln gesehen zu haben; alle diese Kräfte sind deshalb als scheinbare Fernkräfte zu bezeichnen.

Diesen Überlegungen gemäß nehmen wir die folgende, neue Teilung der hydrodynamischen Druckkraft **87** (a) vor:

$$\begin{aligned} X &= X_l + X_f \\ (a) \quad Y &= Y_l + Y_f \\ Z &= Z_l + Z_f, \end{aligned}$$

wo X_l, Y_l, Z_l die Komponenten der lokalen Kraft,

$$\begin{aligned} X_l &= -\frac{1}{2} q \frac{d}{dt} (Ea) \\ (b) \quad Y_l &= -\frac{1}{2} q \frac{d}{dt} (Eb) \\ Z_l &= -\frac{1}{2} q \frac{d}{dt} (Ec), \end{aligned}$$

und X_f, Y_f, Z_f die Komponenten der scheinbaren Fernkräfte,

$$\begin{aligned} X_f &= \frac{3}{2} q \frac{d}{dt} (E\dot{\alpha}) - q \dot{\alpha} \dot{E} - q \left\{ \dot{\alpha}_\alpha \dot{E} + \dot{\alpha}_\beta \dot{G} + \dot{\alpha}_\gamma \dot{H} \right\} \\ (c) \quad Y_f &= \frac{3}{2} q \frac{d}{dt} (E\dot{\beta}) - q \dot{\beta} \dot{E} - q \left\{ \dot{\beta}_\alpha \dot{E} + \dot{\beta}_\beta \dot{G} + \dot{\beta}_\gamma \dot{H} \right\} \\ Z_f &= \frac{3}{2} q \frac{d}{dt} (E\dot{\gamma}) - q \dot{\gamma} \dot{E} - q \left\{ \dot{\gamma}_\alpha \dot{E} + \dot{\gamma}_\beta \dot{G} + \dot{\gamma}_\gamma \dot{H} \right\} \end{aligned}$$

sind.

158. Inducierende Fernkraft und energetische Fernkraft. — Die scheinbare Fernkraft besteht aus zwei Partialkräften mit weit verschiedenen Eigenschaften, der inducierenden und der energetischen Fernkraft. Wie früher wird es sich empfehlen, diese Partialkräfte getrennt zu diskutieren. Wir zerlegen also

$$\begin{aligned} X_f &= X_{fi} + X_e \\ (a) \quad Y_f &= Y_{fi} + Y_e \\ Z_f &= Z_{fi} + Z_e, \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} X_{fi} &= \frac{3}{2} q \frac{d}{dt}(E \dot{\alpha}) \\ (b) \quad Y_{fi} &= \frac{3}{2} q \frac{d}{dt}(E \dot{\beta}) \\ Z_{fi} &= \frac{3}{2} q \frac{d}{dt}(E \dot{\gamma}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} X_e &= -q \dot{\alpha} \dot{E} - q \left\{ \dot{\alpha}_a \dot{E} + \dot{\alpha}_\beta \dot{G} + \dot{\alpha}_\gamma \dot{H} \right\} \\ (c) \quad Y_e &= -q \dot{\beta} \dot{E} - q \left\{ \dot{\beta}_a \dot{E} + \dot{\beta}_\beta \dot{G} + \dot{\beta}_\gamma \dot{H} \right\} \\ Z_e &= -q \dot{\gamma} \dot{E} - q \left\{ \dot{\gamma}_a \dot{E} + \dot{\gamma}_\beta \dot{G} + \dot{\gamma}_\gamma \dot{H} \right\}. \end{aligned}$$

159. Grenze der Verwendbarkeit der Kraftformeln. — Wenn wir mit Hilfe dieser Formeln diejenigen Fernkräfte berechnen wollen, welche eine bestimmte Kugel g des Kugelsystems von seiten der $n - 1$ übrigen Kugeln erleidet, müssen wir den Größen $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\alpha}_a, \dot{\alpha}_\beta, \dot{\alpha}_\gamma \dots$ diejenigen Werte geben, die sie in dem von den $n - 1$ übrigen Kugeln herrührenden Einfallsstrom in der Umgebung der Kugel g haben. Das Potential dieses Einfallsstromes, welches wir in 76 durch φ_γ bezeichnet haben, können wir durch die Methode der successiven Approximation berechnen. Zu bemerken ist aber dabei, daß schon die Kraftformeln nur angenähert richtig sind, und es wird deshalb keinen Zweck haben, wenn man die Berechnung von φ_γ , oder der Koeffizienten $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\alpha}_a, \dots$ desselben über eine gewisse Grenze hinaus fortsetzte, welche wir jetzt bestimmen wollen.

Als Grundlage der Diskussion nehmen wir dann die Voraussetzung, daß die Verhältniszahlen

$$(a) \quad \frac{d_g}{r_{kg}}, \quad \frac{d_k}{r_{kg}}$$

der Radien d_g und d_k zweier beliebiger der Kugeln zu ihrem gegenseitigen Abstände r_{kg} kleine Größen erster Ordnung sind.

Aus dieser Voraussetzung folgt zunächst, daß die in 74 entwickelte Methode der successiven Approximation zu einer rasch konvergierenden Reihe führt, deren einzelne Glieder φ_{gh} , φ_{ghi} , ... wieder durch rasch konvergierende Reihen dargestellt werden. Denn bildet man nach den angegebenen Regeln den expliziten Ausdruck eines Reaktionspotentials, so wird man finden, daß die nacheinander folgenden Glieder Größen der Form (a) in immer steigenden Potenzen enthalten; und vergleicht man zwei nacheinander folgende Reaktionspotentiale, so wird man sehen, daß die einander entsprechenden Glieder um Quadrate von Größen der Form (a) verschieden sind. Kommt man deshalb überein, eine gewisse Potenz der Größen (a) und alle höheren zu vernachlässigen, so kann man leicht aus der Reihe 74(c) eine endliche Anzahl von Gliedern ausscheiden, welche das Potential φ des Kugelsystems mit der verlangten Genauigkeit darstellen. Dasselbe kann man mit der Reihe 76(d) machen, welche den hier besonders in Frage kommenden Einfallsstrom φ_γ darstellt.

Um dann den größten Fehler zu schätzen, zu welchem die Verwendung der Kraftformeln führen kann, brauchen wir nur ein beliebiges der $n - 1$ Hauptglieder des Einfallsstromes φ_γ zu betrachten, beispielsweise das Glied, welches direkt von der Volumänderung und der Translation einer Kugel k herrührt. Die Genauigkeit des Ausdruckes der Kraft war nach 88 dadurch begrenzt, daß wir Kraftglieder vernachlässigt haben, welche Größen der Form

$$(b) \quad q d_g^5 \left(\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial x^2} \right)_g \left(\frac{\partial^3 \varphi_\gamma}{\partial x^3} \right)_g$$

proportional waren. Identifiziert man jetzt φ_γ mit dem von einer volumändernden und fortschreitenden Kugel k herrührenden Potential, welches die Form 35(b) hat, berechnet die Ableitungen dieses Potentials in Bezug auf ihre Größenordnung im Punkte g und setzt in (b) ein, so findet man Ausdrücke von drei verschiedenen Größenordnungen:

$$(c) \quad \frac{d_g^5 d_k^2}{r_{gk}^7}$$

$$(c') \quad \frac{d_g^5 d_k^3}{r_{gk}^8}$$

$$(c'') \quad \frac{d_g^5 d_k^4}{r_{gk}^9}$$

(c) kommt nur vor, wenn die Kugel k volumändernd, (c'') nur, wenn

sie fortschreitend und (c') nur, wenn sie gleichzeitig volumändernd und fortschreitend ist. Wir schliessen also:

Kommen im Kugelsystem nur Kugeln unveränderlichen Volumens vor, so sind die Kraftformeln brauchbar zur Diskussion von Kräften, welche klein bis zur achten Ordnung einschliesslich sind.

Kommen im Kugelsystem Kugeln veränderlichen Volumens vor, so sind die Kraftformeln brauchbar zur Diskussion von Kräften, welche klein bis zur sechsten Ordnung einschliesslich sind.

160. Permanente und temporäre Fernkraft. — Wir haben früher die eine einzige Kugel angreifende Energiekraft in die permanente und die temporäre Partialkraft geteilt. Wir werden jetzt versuchen, dieselbe Teilung bei den im vollständigen Kugelsystem auftretenden Kräften durchzuführen.

Die Grundlage der Zerlegung der Kraft bildet die Zerlegung des Aktionsmomentes in zwei Teile:

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \dot{F}_p + \dot{F}_t \\ (a) \quad \dot{G} &= \dot{G}_p + \dot{G}_t \\ \dot{H} &= \dot{H}_p + \dot{H}_t. \end{aligned}$$

Zerlegt man in dieser Weise die Aktionsmomente jeder Kugel des Systems, so wird sich auch der eine beliebige Kugel umgebende Flüssigkeitsstrom entsprechend zerlegen in die von der permanenten, und die von der temporären Partialbewegung der entfernten Kugeln herrührenden Teile, so dass wir

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \dot{\alpha}_p + \dot{\alpha}_t & \dot{\alpha}_a &= (\dot{\alpha}_a)_p + (\dot{\alpha}_a)_t & \\ (b) \quad \dot{\beta} &= \dot{\beta}_p + \dot{\beta}_t & \dot{\alpha}_\beta &= (\dot{\alpha}_\beta)_p + (\dot{\alpha}_\beta)_t & \\ \dot{\gamma} &= \dot{\gamma}_p + \dot{\gamma}_t & \dot{\alpha}_\gamma &= (\dot{\alpha}_\gamma)_p + (\dot{\alpha}_\gamma)_t & \end{aligned}$$

schreiben können.

Wenn wir dies in den Formeln 157(c) substituieren, müssen wir auf die Grössenordnung der verschiedenen Glieder achten.

Die Geschwindigkeitskomponenten $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ in demjenigen Parallelfelde, welche die entfernten Kugeln in der Umgebung der einen, besonders betrachteten Kugel erzeugen, sind kleine Grössen zweiter oder dritter Ordnung, in Vergleich zu den aktuellen Geschwindig-

keiten (\dot{a} , \dot{b} , \dot{c}) der einzelnen Kugeln. Das temporäre Aktionsmoment (\dot{F}_t , \dot{G}_t , \dot{H}_t) wird deshalb, weil es mit ($\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$) proportional ist, eine kleine GröÙe zweiter oder dritter Ordnung, in Vergleich zu dem permanenten Aktionsmoment (\dot{F}_p , \dot{G}_p , \dot{H}_p) sein, welches der permanenten oder der davon nicht wesentlich verschiedenen aktuellen Geschwindigkeit proportional ist.

Gleichzeitig werden die permanenten linearen und deformativen Geschwindigkeiten $\dot{\alpha}_p$, $\dot{\beta}_p$, $\dot{\gamma}_p$, $(\dot{\alpha}_a)_p \dots$ von der GröÙenordnung der entsprechenden totalen Geschwindigkeiten $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$, $\dot{\alpha}_a \dots$ sein, so daÙ $\dot{\alpha}_p$, $\dot{\beta}_p$, $\dot{\gamma}_p$ kleine GröÙen zweiter und dritter, $(\dot{\alpha}_a)_p \dots$ kleine GröÙen dritter und vierter Ordnung werden. $\dot{\alpha}_t$, $\dot{\beta}_t$, $\dot{\gamma}_t$, $(\dot{\alpha}_a)_t \dots$ dagegen, welche von dem temporären Aktionsmomente der entfernten Kugeln herrühren, werden kleine GröÙen fünfter und sechster, beziehungsweise sechster und siebenter Ordnung.

Setzen wir deshalb (a) und (b) in 157 (c) ein und vernachlässigen GröÙen achter und höherer Ordnungen, so ergibt sich die folgende Zerlegung der Energiekraft:

$$X_e = X_{pe} + X_{te}$$

$$(c) \quad Y_e = Y_{pe} + Y_{te}$$

$$Z_e = Z_{pe} + Z_{te},$$

wo

$$X_{pe} = -q \dot{\alpha}_p \dot{E} - q \left\{ (\dot{\alpha}_a)_p \dot{F}_p + (\dot{\alpha}_\beta)_p \dot{G}_p + (\dot{\alpha}_\gamma)_p \dot{H}_p \right\}$$

$$(d) \quad Y_{pe} = -q \dot{\beta}_p \dot{E} - q \left\{ (\dot{\beta}_a)_p \dot{F}_p + (\dot{\beta}_\beta)_p \dot{G}_p + (\dot{\beta}_\gamma)_p \dot{H}_p \right\}$$

$$Z_{pe} = -q \dot{\gamma}_p \dot{E} - q \left\{ (\dot{\gamma}_a)_p \dot{F}_p + (\dot{\gamma}_\beta)_p \dot{G}_p + (\dot{\gamma}_\gamma)_p \dot{H}_p \right\}$$

und

$$X_{te} = -q \dot{\alpha}_t \dot{E} - q \left\{ (\dot{\alpha}_a)_t \dot{F}_p + (\dot{\alpha}_\beta)_t \dot{G}_p + (\dot{\alpha}_\gamma)_t \dot{H}_p \right\} - q \left\{ (\dot{\alpha}_a)_p \dot{F}_t + (\dot{\alpha}_\beta)_p \dot{G}_t + (\dot{\alpha}_\gamma)_p \dot{H}_t \right\}$$

$$(e) \quad Y_{te} = -q \dot{\beta}_t \dot{E} - q \left\{ (\dot{\beta}_a)_t \dot{F}_p + (\dot{\beta}_\beta)_t \dot{G}_p + (\dot{\beta}_\gamma)_t \dot{H}_p \right\} - q \left\{ (\dot{\beta}_a)_p \dot{F}_t + (\dot{\beta}_\beta)_p \dot{G}_t + (\dot{\beta}_\gamma)_p \dot{H}_t \right\}$$

$$Z_{te} = -q \dot{\gamma}_t \dot{E} - q \left\{ (\dot{\gamma}_a)_t \dot{F}_p + (\dot{\gamma}_\beta)_t \dot{G}_p + (\dot{\gamma}_\gamma)_t \dot{H}_p \right\} - q \left\{ (\dot{\gamma}_a)_p \dot{F}_t + (\dot{\gamma}_\beta)_p \dot{G}_t + (\dot{\gamma}_\gamma)_p \dot{H}_t \right\}.$$

Die erste dieser Partialkräfte nennen wir die permanente, die zweite die temporäre Energiekraft in Bezug auf das Kugelsystem.

161. Fernkräfte niederer und höherer Ordnung. — Nach den eben angestellten Überlegungen erkennt man, daß die einzelnen Glieder im Ausdrucke der permanenten Energiekraft kleine Größen zweiter, dritter und vierter Ordnung sind, während die in den Ausdruck der temporären Energiekräfte eingehenden Glieder kleine Größen fünfter, sechster und siebenter Ordnung sind. Gleichzeitig ist die inducierende Fernkraft klein zweiter oder dritter Ordnung, wie man sofort aus der Größenordnung der darin eingehenden α , β , γ erkennt. Dabei schätzen wir nur die Größenordnung der Kräfte nach den eingehenden Potenzen der Größen **159** (a), und nicht nach den verschiedenen Intensitäten, welche die Kräfte an sich wegen der vorliegenden Bewegungsformen haben können (vergl. **123** und **124**).

Wie wir eben gefunden haben, können die Glieder, welche wir bei der Entwicklung unserer fundamentalen Kräfteformeln vernachlässigt haben, unter Umständen die siebente Größenordnung erreichen. Die Diskussion der temporären Kräfte erfordert deshalb besondere Vorsicht, und schon aus diesem Grunde empfiehlt es sich, sie in eine Klasse für sich zu stellen, deren Diskussion wir erst anfangen, nachdem wir die Untersuchungen der inducierenden Fernkräfte und der permanenten energetischen Fernkräfte erledigt haben.

Die inducierenden und die permanent-energetischen Fernkräfte werden wir deshalb als hydrodynamische Fernkräfte niederer Ordnung zusammenfassen, die temporär-energetischen Fernkräfte als hydrodynamische Fernkräfte höherer Ordnung bezeichnen. Zur niederen Ordnung rechnen wir also alle Kräfte, welche kleine Größen der zweiten, dritten und vierten Ordnung sind, zur höheren Ordnung alle Kräfte fünfter oder höherer Ordnungen.

Dritter Abschnitt.

Die lokale Druckkraft und das Trägheitsprinzip.

162. Vergleich des Kugelsystems mit einem System von materiellen Punkten. — Nach der somit vorgenommenen Klassifikation der im Kugelsysteme auftretenden Kräfte gehen wir zu der Diskussion der Eigenschaften dieser Kräfte über. Dabei werden wir erst untersuchen, ob sie diejenigen allgemeinen Eigenschaften be-

sitzen, die wir in der auf GALILEI-NEWTON'scher Grundlage gebauten rationellen Mechnik den Kräften beizulegen pflegen.

Diese allgemeinen Eigenschaften der Kräfte sind in den drei NEWTON'schen Bewegungsgesetzen enthalten, und die Frage kann so gestellt werden:

Denken wir uns in der Lage eines Beobachters, welcher zunächst die Flüssigkeit nicht sehen kann, und dann von den Bewegungen der Kugeln nur die progressiven, mit größeren Ortsveränderungen verbundenen Bewegungen, nicht aber die vielleicht auch vorhandenen kleinen Schwingungen wahrnimmt, würden wir dann zu dem Resultat kommen, daß die Bewegungen des Kugelsystems in Übereinstimmung mit den drei NEWTON'schen Bewegungsgesetzen verlaufen?

Beim ersten Anblick scheint die lokale Druckkraft, welche wir erst diskutieren wollen, Schwierigkeiten darzubieten. Denn die rationelle Mechanik kennt nur gegenseitige Kräfte zwischen je zwei materiellen Punkten. Eine lokale Kraft, welche auf einen Punkt wirkt, ohne von einem anderen herzurühren, besteht nicht. Die einzige Wirkung lokaler Natur ist die träge Reaktion des Punktes gegen die Wirkung der entfernten Punkte. Soll deshalb unser Beobachter zu dem Resultat kommen können, daß die Bewegung des Kugelsystems wie die Bewegung eines materiellen Punktsystems verläuft, so muß er die Wirkung der lokalen Kraft nicht von der trägen Reaktion der Kugel trennen können. Diese Trennung war aber, wie wir schon gesehen haben, unmöglich wenn nur eine Kugel unveränderlichen Volumens vorhanden war (153). Es wird also zu untersuchen sein, inwieweit auch im allgemeinsten Falle die lokale Kraft sich in dieser Weise der Beobachtung entziehen, und nur die träge Reaktion der Kugel gegen die äußeren Kräfte modificieren wird.

Das Gesetz von der Trägheit und von der trägen Reaktion der Körper gegen die Einwirkung bewegender Kräfte ist in den beiden ersten NEWTON'schen Bewegungsgesetzen enthalten. Die Frage läuft also darauf hinaus, ob unserem Beobachter diese beiden Gesetze als erfüllt scheinen werden.

163. Umformung der Bewegungsgleichungen der Kugel. — Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir die Bewegung einer beliebigen der Kugeln unter dem Einflusse der lokalen Kraft, der von den anderen Kugeln herrührenden, scheinbaren Fernkraft, und even-

tuell, der Allgemeinheit halber, einer fremden, nicht hydrodynamischen Kraft. Der allgemeinste Ausdruck der lokalen Kraft ist in 157(b) aufgeschrieben. Wenn wir wieder die von der Kugel verdrängte Flüssigkeitsmasse $m = q E$ einführen, wird der Ausdruck derselben

$$\begin{aligned} X_l &= -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{a}\right) \\ (a) \quad Y_l &= -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{b}\right) \\ Z_l &= -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{c}\right). \end{aligned}$$

Die hydrodynamische Fernkraft und die fremde Kraft sollen zusammen die Komponenten \mathfrak{X} , \mathfrak{Y} , \mathfrak{Z} haben. Die Bewegungsgleichungen der Kugel werden dann:

$$\begin{aligned} M \ddot{a} &= -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{a}\right) + \mathfrak{X} \\ (b) \quad M \ddot{b} &= -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{b}\right) + \mathfrak{Y} \\ M \ddot{c} &= -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{c}\right) + \mathfrak{Z}. \end{aligned}$$

Wenn wir sie mit den Bewegungsgleichungen eines freien materiellen Punktes vergleichen wollen, welcher der Wirkung fernwirkender Kräfte ausgesetzt ist, dürfen auf der rechten Seite nur die Komponenten der bewegenden fernwirkenden Kraft vorkommen. Die lokale Kraft ziehen wir deshalb auf die linke Seite. Hier wird dann die Gröfse

$$(c) \quad \mathfrak{M} = M + \frac{1}{2} m$$

auftreten, welche die Masse der Kugel vergrößert um die Masse des halben verdrängten Flüssigkeitsvolumens ist, und welche wir die effektive Masse der Kugel in der Flüssigkeit nennen können. Gleichzeitig werden wir, der gewöhnlichen Terminologie der rationalen Mechanik entsprechend, das Produkt $(\mathfrak{M} \dot{a}, \mathfrak{M} \dot{b}, \mathfrak{M} \dot{c})$ der Geschwindigkeit in die effektive Masse die effektive Bewegungsgröfse der Kugel in der Flüssigkeit nennen. Die Bewegungsgleichungen der Kugel werden dann

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathfrak{M} a) &= \mathfrak{X} \\ \text{(d)} \quad \frac{d}{dt}(\mathfrak{M} b) &= \mathfrak{Y} \\ \frac{d}{dt}(\mathfrak{M} c) &= \mathfrak{Z} \end{aligned}$$

und sagen also aus, daß die Zeitableitung der effektiven BewegungsgröÙe der bewegenden Kraft gleich ist.

164. Das Trägheitsgesetz. — Denken wir uns jetzt alle anderen Kugeln hinlänglich weit entfernt, so reduciert sich die scheinbare hydrodynamische Fernkraft auf Null. Ist zugleich die fremde, nicht hydrodynamische Kraft gleich Null, so wird $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = 0$, und die Integration ergibt, daß die GröÙen $\mathfrak{M} a$, $\mathfrak{M} b$ und $\mathfrak{M} c$ konstant oder Null sein müssen. Es ergibt sich also das folgende Gesetz, welches das im leeren Raume gültige Trägheitsgesetz vertritt:

Eine Kugel veränderlichen Volumens in einer Flüssigkeit beharrt in ihrem Zustande der Ruhe oder der Bewegung in gerader Linie mit konstanter effektiver BewegungsgröÙe, wenn sie nicht durch hydrodynamische Fernkräfte oder fremde Kräfte gezwungen wird, diesen Bewegungszustand zu ändern.

Das Gesetz unterscheidet sich von dem Trägheitsgesetze dadurch, daß die unveränderliche Geschwindigkeit durch die unveränderliche effektive BewegungsgröÙe ersetzt ist. Hat die Kugel konstantes Volumen, so wird die effektive Masse der Kugel konstant, und die Unveränderlichkeit der effektiven BewegungsgröÙe führt zu der unveränderlichen Geschwindigkeit. Wir kommen dann zu dem DIRICHLET'schen Falle (153) und dem einfachen Trägheitsgesetze zurück.

Im allgemeinen wird aber die Geschwindigkeit eine veränderliche sein, und zwar so, daß bei größter effektiver Masse oder größtem Volumen der Kugel die Geschwindigkeit am kleinsten ist, und bei kleinster effektiver Masse oder kleinstem Volumen am größten. Diese Geschwindigkeitsänderungen verlaufen aber in der Weise, daß einem bestimmten Volumen eine bestimmte Geschwindigkeit entspricht. Wenn deshalb das Volumen zu seinem ursprünglichen Werte zurückgekehrt ist, wird auch die Geschwindigkeit zu dem ursprünglichen Werte zurückgekehrt sein. Verlaufen die Volumänderungen, wie wir im allgemeinen annehmen, periodisch, so wird

die effektive Masse um einen gewissen Mittelwert \mathfrak{M}_0 , und die Geschwindigkeit um einen entsprechenden Mittelwert $\dot{a}_0, \dot{b}_0, \dot{c}_0$ periodisch schwingen.

Eine pulsierende Kugel wird deshalb mit konstanter mittlerer Geschwindigkeit durch die Flüssigkeit fortschreiten. Und wenn die Pulsationen hinlänglich schnell und mit hinlänglich kleinen Amplituden verlaufen, wird die thatsächlich rhythmische Natur der Bewegung sich jeder Beobachtung entziehen. Wenn ein Beobachter mit beschränktem Wahrnehmungsvermögen auf Grundlage seiner Erfahrungen die Mechanik des Kugelsystems studiert, wird er also zu dem Prinzip von der Trägheit in seiner gewöhnlichen Form kommen, so wie es GALILEI und NEWTON für die sichtbaren Bewegungen unserer Welt aufgestellt haben.

165. Das zweite Bewegungsgesetz. — Kehren wir jetzt zu dem allgemeinen Fall zurück, wo die Kugel der Wirkung fremder Kräfte oder hydrodynamischer Fernkräfte ausgesetzt ist, so gelten die Gleichungen 163 (d). Dieselben haben genau die Form der Bewegungsgleichungen eines materiellen Punktes, so wie man sie in unmittelbarem Anschluß an das zweite NEWTON'sche Bewegungsgesetz aufschreibt. Die Gleichungen lassen sich also durch den folgenden, dem zweiten NEWTON'schen Bewegungsgesetz analogen Satz wiedergeben:

Die Veränderung der effektiven Bewegungsgröße der Kugel ist gleich der wirkenden Kraft und geschieht in der Richtung derjenigen geraden Linie, längs welcher die Kraft wirkt.

Diejenige Größe, deren Konstanz das Kriterium war, daß keine Kraft wirkte, nämlich die effektive Bewegungsgröße, giebt also, wenn sie veränderlich ist, durch ihre Zeitableitung das Maß der einwirkenden Kraft. Dieses Gesetz steht deshalb in genau derselben Beziehung zu dem oben gegebenen Trägheitsgesetz, wie das zweite NEWTON'sche Gesetz zu dem gewöhnlichen Trägheitsgesetz. Die allgemeinere Natur der hydrodynamischen effektiven Trägheit macht sich deshalb auch hier geltend; und der Unterschied von den Bewegungsgleichungen eines materiellen Punktes tritt sofort hervor, wenn wir durch Ausführung der Differentiation nach der Zeit zu der gewöhnlichsten Form dieser Gleichungen übergehen. Denn wegen der Konstanz der Masse des materiellen Punktes erhält man dann in der gewöhnlichen rationalen Mechanik auf der linken Seite der Gleichungen das Produkt der Masse in die Beschleunigung. Im

hydrodynamischen Fall ist dagegen die effektive Masse \mathfrak{M} eine veränderliche Gröfse, welche die kompliziertere Natur der trägen Reaktion der veränderlichen Kugel in der Flüssigkeit zeigt.

Denken wir uns aber wieder die Volumänderungen der Kugel periodisch mit kurzer Periode und kleinen Amplituden, so wird diese veränderliche träge Reaktion der Kugel einen schnell rhythmischen Charakter erhalten, wobei sich die veränderliche Natur dieser Reaktion der Beobachtung entzieht.

Um diesen Fall näher zu betrachten schreiben wir:

$$(a) \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 + \mathfrak{M}_1,$$

wo \mathfrak{M}_0 der konstante Mittelwert der effektiven Masse ist, und \mathfrak{M}_1 also eine periodische Funktion mit dem Mittelwert Null. Gleichzeitig teilen wir die Geschwindigkeitskomponente \dot{a} der Kugel, wie in 41, in die langsam verlaufende äufere und die schnell verlaufende innere Bewegung:

$$(b) \quad \dot{a} = \dot{a}_0 + \dot{a}_1,$$

wo \dot{a}_1 dadurch definiert ist, dafs es während der kurzen Periode den Mittelwert Null hat. Die erste Bewegungsgleichung wird dann

$$(c) \quad \frac{d}{dt} \left(\mathfrak{M}_0 \dot{a}_0 + \mathfrak{M}_0 \dot{a}_1 + \mathfrak{M}_1 \dot{a}_0 + \mathfrak{M}_1 \dot{a}_1 \right) = \mathfrak{X}.$$

Ist nun \mathfrak{X}_0 der Mittelwert von \mathfrak{X} während der kurzen Periode, und nehmen wir den Mittelwert während dieser Zeit unter Benutzung des Satzes 21 (A), so werden die Gleichung (c) und die entsprechenden Gleichungen für die Bewegung längs der beiden anderen Achsen:

$$\mathfrak{M}_0 \ddot{a}_0 = \mathfrak{X}_0$$

$$(d) \quad \mathfrak{M}_0 \ddot{b}_0 = \mathfrak{Y}_0$$

$$\mathfrak{M}_0 \ddot{c}_0 = \mathfrak{Z}_0.$$

Diese Gleichungen stellen dann den beobachtbaren Teil der Bewegung dar, und sie haben genau dieselbe Form, wie die Bewegungsgleichungen eines materiellen Punktes mit der Masse \mathfrak{M}_0 .

Wir dürfen deshalb schliessen, dafs ein Beobachter, welcher die Bewegungen des Kugelsystems experimentell studiert, durch seine empirischen Untersuchungen nicht zu den streng gültigen Gesetzen 164 und 165 kommen würde, sondern eben zu dem damit fast gleichlautenden ersten, beziehentlich zweiten NEWTON'schen Bewe-

gungsgesetz. In unseren weiteren Diskussionen werden wir aber fortwährend die exakten Formen verwenden, um jedesmal erst die wirklichen Gesetze kennen zu lernen, und nachher durch besondere Spezialisierung untersuchen, welche Gesetze unser Beobachter auf empirischem Wege finden würde.

Vierter Abschnitt.

Unabhängige Wirkung der hydrodynamischen Fernkräfte niederer Ordnung.

166. Vereinfachungen bei beschränkter Genauigkeit der Kraftmessungen. — Nachdem somit die Frage von der lokalen Druckkraft erledigt ist, gehen wir zu den hydrodynamischen Fernkräften über, und zwar betrachten wir zunächst nur die Kräfte niederer Ordnung, das heißt, wir sehen von den Kräften temporärer Natur ab.

Wenn wir diese Kräfte vernachlässigen, so können wir uns in die Lage eines Beobachters gestellt denken, welcher die Mechanik des Kugelsystems experimentell studiert und seine Kraftmessungen nur mit begrenzter Genauigkeit anstellen kann. Vorausgesetzt, daß er Kräfte, welche wie die fünfte oder eine noch höhere Potenz des Abstandes abnehmen, nicht messen kann, wird es ihm nicht gelingen, die temporären Kräfte oder überhaupt Kräfte höherer Ordnung zu isolieren. Das heißt, er wird keinen Unterschied entdecken können zwischen der totalen Energiekraft **158**(c) und der permanenten **160**(d). Er wird dann auch nicht durch seine Kraftmessungen feststellen können, ob die Kraft von dem totalen Aktionsmomente (\dot{F} , \dot{G} , \dot{H}) oder von dem permanenten (\dot{F}_p , \dot{G}_p , \dot{H}_p) abhängt, und ebensowenig wird er entscheiden können, ob sie von dem wirklichen Einfallstromen $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$, $\dot{\alpha}_a$, $\dot{\alpha}_\beta$, . . . oder nur von dem permanenten Teile desselben abhängt.

Auf diesem Standpunkte der beschränkten Genauigkeit der Beobachtungen tritt deshalb eine Reihe von wesentlichen Vereinfachungen ein. Die temporären Aktionsmomente hängen von dem Einfallstromen ab, wie die Formeln **121**(c') zeigen. Der Einfallstrom hängt aber wieder von der Lage und der Bewegung der entfernten Kugeln ab. Das totale Aktionsmoment (\dot{F}_g , \dot{G}_g , \dot{H}_g) einer

Kugel g wird deshalb wegen des darin enthaltenen temporären Partialmomentes im allgemeinen eine Funktion der Koordinaten a_k, b_k, c_k einer beliebigen der entfernten Kugeln sein. Diese Abhängigkeit wird aber bei den Kraftmessungen wegen der vorausgesetzten beschränkten Genauigkeit nicht hervortreten können. Wenn der Beobachter zwischen totalem und permanentem Aktionsmomente nicht unterscheiden kann, wird er ebensowenig zwischen den zwei Definitionen **30**(b_3) und **68**(c') dieser Größen unterscheiden können. Wir sind also berechtigt, in der folgenden Diskussion als Definition des Aktionsmomentes einer Kugel g die einfachen Formeln

$$(a) \quad \dot{F}_g = \frac{3}{2} E_g \dot{a}_g, \quad \dot{G}_g = \frac{3}{2} E_g \dot{b}_g, \quad \dot{H}_g = \frac{3}{2} E_g \dot{c}_g$$

zu benutzen, und dabei dieses Aktionsmoment als eine von den Koordinaten aller anderen Kugeln unabhängige Größe zu behandeln.

Wenn somit der Unterschied zwischen aktuellem und permanentem Aktionsmoment fortfällt, fällt auch gleichzeitig der Unterschied zwischen aktueller und permanenter Geschwindigkeit der Kugel (**120**) fort. Die aktuelle Geschwindigkeit ($\dot{a}_g, \dot{b}_g, \dot{c}_g$) der Kugel g kann innerhalb der Approximationsgrenze als eine von den Koordinaten a_k, b_k, c_k jeder anderen Kugel k unabhängige Größe betrachtet werden.

Schließlich folgt aus der Unfähigkeit des Beobachters, zwischen dem wirklichen Einfallsstrom und dem permanenten Teile desselben zu unterscheiden, eine sehr bedeutende Vereinfachung. Denn derjenige Strom, welchen eine Kugel erzeugt, weil sie von dem umgebenden Einfallsstrom einer fremdinducierten oder temporären Geschwindigkeit mitgeteilt wird, ist genau von derselben Größenordnung als der Reaktionsstrom, welchen eine in Ruhe befindliche Kugel in demselben Strome erzeugen würde. Denn die Konfliktgeschwindigkeit, auf der die Bildung des Stromes beruht, ist im letzten Falle $-\dot{\alpha}, -\dot{\beta}, -\dot{\gamma}$, und im ersten zwischen den Grenzen $-\dot{\alpha}, -\dot{\beta}, -\dot{\gamma}$ und $2\dot{\alpha}, 2\dot{\beta}, 2\dot{\gamma}$ eingeschlossen (**110**). Bei der Berechnung des Einfallsstromes q_γ in der Umgebung der Kugel g wird deshalb die Berücksichtigung der von den entfernten Kugeln k herrührenden Reaktionspotentiale bedeutungslos. Der Einfallsstrom q_γ kann, wie in **78**(a), einfach berechnet werden als die Summe der $n - 1$ Aktionsströme, deren jeder von einer der entfernten Kugeln herrührt:

$$(b) \quad \varphi_r = \sum_{k \geq g} \varphi_k,$$

wo φ_k die Form 35(e) hat, die noch zweckmäßiger

$$(c) \quad \varphi_k = -\frac{\dot{E}_k}{4\pi r_k} - \dot{E}_k \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{4\pi r_k} - \dot{G}_k \frac{\partial}{\partial b_k} \frac{1}{4\pi r_k} - \dot{H}_k \frac{\partial}{\partial c_k} \frac{1}{4\pi r_k}$$

geschrieben werden kann, wo

$$(c') \quad r_k = \sqrt{(x - a_k)^2 + (y - b_k)^2 + (z - c_k)^2}.$$

Aus diesem φ_r oder aus dem darin enthaltenen φ_k sind also die in die allgemeinen Kraftformeln eingehenden Koeffizienten $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\alpha}_\alpha, \dot{\alpha}_\beta, \dots$ zu berechnen. Die allgemein gültige Berechnungsmethode ist, daß man, wie in 77(c), die Differentiation nach x, y und z ausführt, und nachher $x = a_g, y = b_g, z = c_g$ substituiert. Da aber keine Reaktionspotentiale vorkommen, liegt eben der Fall 78(b) vor, so daß wir schon in φ_k die Substitution ausführen können. Diese Substitution giebt

$$(d) \quad (\varphi_k)_g = -\frac{\dot{E}_k}{4\pi r_{kg}} - \dot{E}_k \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} - \dot{G}_k \frac{\partial}{\partial b_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} - \dot{H}_k \frac{\partial}{\partial c_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}},$$

wo r_{kg} die Bedeutung

$$(d') \quad r_{kg} = \sqrt{(a_g - a_k)^2 + (b_g - b_k)^2 + (c_g - c_k)^2}.$$

hat. Aus diesem $(\varphi_k)_g$ bildet man die in Frage kommenden $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\alpha}_\alpha, \dots$ einfach durch Differentiation nach a_g, b_g, c_g . Wenn wir im folgenden diese Ableitungen explicite aufschreiben, werden wir der Einfachheit halber φ_k anstatt $(\varphi_k)_g$ setzen. Die Ausdrücke

$$(e) \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial a_g} \quad \text{und} \quad \frac{\partial (\varphi_k)_g}{\partial a_g}$$

sind also als untereinander identisch aufzufassen. Wenn wir die erstere, einfache Schreibweise benutzen, wird stillschweigend vorausgesetzt, daß die Substitution $x = a_g, \dots$ schon ausgeführt ist.

167. Die Funktion φ_k und die Operation χ_k . — Zur Abkürzung von Formeln und Rechnungen im folgenden können wir ein zweckmäßiges Operationssymbol einführen. Wie man bemerkt, entsteht die durch 166(c) dargestellte Funktion φ_k , wenn man an der Funktion

$$(a) \quad -\frac{1}{4\pi r_k}$$

die Operation

$$(b) \quad \chi_k = \dot{E}_k + \dot{F}_k \frac{\partial}{\partial a_k} + \dot{G}_k \frac{\partial}{\partial b_k} + \dot{H}_k \frac{\partial}{\partial c_k}$$

ausführt.¹ Wir können also die Gleichung 166 (c) auch in der Form

$$(c) \quad \varphi_k = -\chi_k \frac{1}{4\pi r_k}$$

schreiben. In ganz ähnlicher Weise wird die Anwendung der Operation χ_k auf die Funktion $-\frac{1}{4\pi r_{kg}}$ zu der in 166 (d) gegebenen Funktion $(\varphi_k)_g$ führen.

Die Operation χ_k zerlegt sich von selbst in zwei einfachere Operationen

$$(d) \quad \chi_k = \chi_k^0 + \chi_k^1.$$

Die Operation χ_k^0 reduziert sich auf die Multiplikation mit dem Faktor \dot{E}_k ,

$$(d') \quad \chi_k^0 = \dot{E}_k.$$

Die Operation χ_k^1 wird durch

$$(d'') \quad \chi_k^1 = \dot{F}_k \frac{\partial}{\partial a_k} + \dot{G}_k \frac{\partial}{\partial b_k} + \dot{H}_k \frac{\partial}{\partial c_k}$$

definiert, und reduziert sich also auf eine Differentiation nach einer Achse (27) und gleichzeitige Multiplikation mit einer Konstanten.

In ähnlicher Weise kann man die Operationen χ_g, χ_h, \dots definieren. Geht man von einer Funktion aus, welche gleichzeitig die Koordinaten a_g, b_g, c_g und a_k, b_k, c_k enthält, so kann man nacheinander die Operationen χ_k und χ_g ausführen. So findet man beispielsweise durch Anwendung der zusammengesetzten Operation $\chi_g \chi_k$ auf die Funktion $\frac{1}{4\pi r_{kg}}$:

¹ Vergl. C. A. BJERKNES: Über die Druckkräfte, die durch gleichzeitige, mit Kontraktionen und Dilatationen verbundene Bewegungen von mehreren kugelförmigen, in einer inkompressiblen Flüssigkeit befindlichen Körpern entstehen. Göttinger Nachrichten 1876 S. 252. Die hier definierte Operation φ_k ist etwas zusammengesetzter als unsere Operation χ_k , da sich die erstere auf die Parameter $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, \dot{d}$, die letztere auf die Parameter $\dot{E}, \dot{F}, \dot{G}, \dot{H}$ bezieht.

$$\begin{aligned}
\chi_k \chi_g \frac{1}{4\pi r_{kg}} &= \frac{\dot{E}_k \dot{E}_g}{4\pi r_{kg}} \\
&+ \dot{E}_k \dot{F}_g \frac{\partial}{\partial a_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{E}_k \dot{G}_g \frac{\partial}{\partial b_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{E}_k \dot{H}_g \frac{\partial}{\partial c_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \\
&+ \dot{E}_g \dot{F}_k \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{E}_g \dot{G}_k \frac{\partial}{\partial b_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{E}_g \dot{H}_k \frac{\partial}{\partial c_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \\
&+ \dot{F}_k \dot{F}_g \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{F}_k \dot{G}_g \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial b_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{F}_k \dot{H}_g \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial c_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \\
&+ \dot{G}_k \dot{F}_g \frac{\partial^2}{\partial b_k \partial a_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{G}_k \dot{G}_g \frac{\partial^2}{\partial b_k \partial b_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{G}_k \dot{H}_g \frac{\partial^2}{\partial b_k \partial c_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \\
&+ \dot{H}_k \dot{F}_g \frac{\partial^2}{\partial c_k \partial a_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{H}_k \dot{G}_g \frac{\partial^2}{\partial c_k \partial b_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{H}_k \dot{H}_g \frac{\partial^2}{\partial c_k \partial c_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}}.
\end{aligned}
\tag{e}$$

Die erste Zeile rechts enthält hier das Resultat der Operation $\chi_k^0 \chi_g^0$, die zweite das Resultat der Operation $\chi_k^0 \chi_g^1$, die dritte das Resultat der Operation $\chi_k^1 \chi_g^0$, und die drei letzten das Resultat der Operation $\chi_k^1 \chi_g^1$. Aus der vollständigen Symmetrie folgt, daß die Reihenfolge der Operationen χ_k und χ_g gleichgültig ist.

168. Ungestörte Superposition der hydrodynamischen Fernkräfte niederer Ordnung. — Wenn wir die in 166 auseinandergesetzten Vereinfachungen benutzen, können wir als Ausdruck der meßbaren Kräfte die Formeln 157 (c) beibehalten. Wenn im besonderen g die Kugel ist, welche die Kraft erleidet, so schreiben wir:

$$\begin{aligned}
X &= \frac{3}{2} q \frac{d}{dt} (E_g \dot{\alpha}) - q \dot{\alpha} \dot{E}_g - q \left\{ \dot{\alpha}_\alpha \dot{F}_g + \dot{\alpha}_\beta \dot{G}_g + \dot{\alpha}_\gamma \dot{H}_g \right\} \\
Y &= \frac{3}{2} q \frac{d}{dt} (E_g \dot{\beta}) - q \dot{\beta} \dot{E}_g - q \left\{ \dot{\beta}_\alpha \dot{F}_g + \dot{\beta}_\beta \dot{G}_g + \dot{\beta}_\gamma \dot{H}_g \right\} \\
Z &= \frac{3}{2} q \frac{d}{dt} (E_g \dot{\gamma}) - q \dot{\gamma} \dot{E}_g - q \left\{ \dot{\gamma}_\alpha \dot{F}_g + \dot{\gamma}_\beta \dot{G}_g + \dot{\gamma}_\gamma \dot{H}_g \right\},
\end{aligned}
\tag{a}$$

wo $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\alpha}_\alpha, \dot{\alpha}_\beta, \dots$ die Koeffizienten der Entwicklung von φ_γ in der Umgebung des Punktes g sind.

Da jetzt, nach den eben angestellten Überlegungen, keine Reaktionspotentiale in Frage kommen, wird der Strom φ_γ als das Superpositionsresultat von $n - 1$ einfachen Strömen aufgefaßt werden können, deren jeder von einer bestimmten unter den entfernten

Kugeln herrührt, als ob nur diese eine Kugel vorhanden wäre. Wenn also k eine beliebige dieser Kugeln ist, können wir

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \sum_{k \geq g}^k \dot{\alpha}_k, & \dot{\alpha}_\alpha &= \sum_{k \geq g}^k (\dot{\alpha}_\alpha)_k, & \dot{\beta}_\alpha &= \sum_{k \geq g}^k (\dot{\beta}_\alpha)_k, & \dot{\gamma}_\alpha &= \sum_{k \geq g}^k (\dot{\gamma}_\alpha)_k \\ \text{(b)} \quad \dot{\beta} &= \sum_{k \geq g}^k \dot{\beta}_k, & \dot{\alpha}_\beta &= \sum_{k \geq g}^k (\dot{\alpha}_\beta)_k, & \dot{\beta}_\beta &= \sum_{k \geq g}^k (\dot{\beta}_\beta)_k, & \dot{\gamma}_\beta &= \sum_{k \geq g}^k (\dot{\gamma}_\beta)_k \\ \dot{\gamma} &= \sum_{k \geq g}^k \dot{\gamma}_k, & \dot{\alpha}_\gamma &= \sum_{k \geq g}^k (\dot{\alpha}_\gamma)_k, & \dot{\beta}_\gamma &= \sum_{k \geq g}^k (\dot{\beta}_\gamma)_k, & \dot{\gamma}_\gamma &= \sum_{k \geq g}^k (\dot{\gamma}_\gamma)_k \end{aligned}$$

schreiben. Setzen wir dies in (a) ein, so werden sich diese Ausdrücke in linearer Weise in eine Reihe von Gliedern auflösen, deren jedes von einer distinkten Kugel k herrührt:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{k \geq g}^k X_k \\ \text{(c)} \quad Y &= \sum_{k \geq g}^k Y_k \\ Z &= \sum_{k \geq g}^k Z_k. \end{aligned}$$

Diese Formeln stellen das Prinzip von der ungestörten Superposition der einzelnen Kräfte dar. Um uns den Inhalt dieses Prinzips in dem hier vorliegenden Falle vollständig klar zu machen, können wir uns vorstellen, daß unser Beobachter den folgenden Versuch macht: Von den $n - 1$ agierenden Kugeln werden alle bis auf eine bestimmte, k , ins Unendliche entfernt, und es wird die Kraft (X_k, Y_k, Z_k) gemessen, welche diese Kugel allein, von der Lage a_k, b_k, c_k aus auf die Kugel g ausübt. Dann wird diese Kugel k entfernt, und eine andere h in die Lage a_h, b_h, c_h gebracht und die Kraft (X_h, Y_h, Z_h) gemessen, welche diese Kugel allein von ihrer Lage aus auf die Kugel g ausübt, und so weiter. Nachdem in dieser Weise alle die Einzelkräfte gemessen sind, die jede einzelne der $n - 1$ Kugeln, von ihrer besonderen Lage aus, aber allein vorhanden, auf die Kugel g ausüben, werden alle Kugeln gleichzeitig in ihren Lagen angebracht und die Kraft (X, Y, Z) gemessen, welche sie gleichzeitig wirkend auf g ausüben. Der Beobachter wird dann finden, daß zwischen den Komponenten der gemessenen Einzelkräfte und der gemessenen Gesamtkraft die Relationen (b) bestehen.

Unter ausdrücklichem Hinweis darauf, daß dieses Experiment die physikalische Definition des Prinzips von der ungestörten Superposition der Kräfte enthält, können wir also behaupten:

Die von den einzelnen entfernten Kugeln herrührenden hydrodynamischen Fernkräfte lassen sich einander superponieren, ohne einander zu stören.

Wenn dieser Satz auf zwei Kräfte verwendet wird, stellt er das Prinzip von dem Parallelogramm der Kräfte dar.

Da dieses Prinzip für jedes einzelne Glied rechts in den Formeln (a) gilt, so ist es zugleich auch für die inducierende Fernkraft für sich, und für die permanente Energiekraft für sich gültig.

169. Das Prinzip von dem Parallelogramm der Kräfte als formell-mathematischer und als reell-physikalischer Satz. — Mit Rücksicht besonders auch auf später folgende Untersuchungen wird es wichtig sein, scharf zwischen dem formellen, mathematischen und dem realen, physikalischen Inhalt der Sätze von der Zusammensetzung und der Zerlegung der Kräfte zu unterscheiden.

Die Kräfte sind Vektorgrößen und können wie alle anderen Vektorgrößen nach den Gesetzen der Vektorsummation zusammengesetzt und zerlegt werden. Einen physikalischen Inhalt erhält diese mathematische Zerlegung erst dann, wenn es gelingt, eine physikalische Realität der einzelnen Kraftkomponenten nachzuweisen.

Wenn man in Anschluß an das zweite NEWTON'sche Bewegungsgesetz die Kraft als eine der Beschleunigung des bewegten Körpers proportionale Größe definiert hat, folgt unmittelbar, daß die Kraft genau wie die Beschleunigung eine Vektorgröße ist, und folglich mathematisch durch Komponenten dargestellt werden kann. Inwieweit diese Komponenten physikalische Realität als selbständig wirkende Kräfte haben, läßt sich dagegen nicht entscheiden, solange man, wie im zweiten Bewegungsgesetz, nur einen bewegten Körper betrachtet, und nicht den oder die bewegenden Körper berücksichtigt, von welchen die Kraft oder die Kräfte herrühren. Erst wenn man, nach Einführung des dritten Bewegungsgesetzes, oder des Gegenwirkungsprinzips, zugleich die wirkenden Körper in Betracht gezogen hat, wird man mit physikalisch definierbaren Komponenten und einem Parallelogrammgesetz physikalischen Inhaltes zu thun haben.

Es ist ein solches Parallelogrammgesetz physikalischen Inhaltes, welches wir jetzt für die hydrodynamischen Fernkräfte abgeleitet

haben, während die allgemeine Vektornatur dieser Kräfte schon aus der ersten Definition derselben hervorgeht (80), und daher keines Beweises bedarf.

170. Kräftefunktion der Energiekraft. — Um weitere Eigenschaften der hydrodynamischen Fernkräfte zu finden, müssen wir die Ausdrücke 168(a) der Kräfte auf weiter entwickelte Form bringen. Diese Entwicklung wird aber nach dem eben erhaltenen Resultat wesentlich erleichtert: wir brauchen immer nur eine einzige entfernte Kugel k auf einmal in Betracht zu ziehen. Ist die Kraft bekannt, welche diese eine Kugel auf die Kugel g ausübt, so können wir durch Superposition die Kraft finden, welche sämtliche Kugeln ausüben.

Wir betrachten dabei die inducierende und die energetische Kraft getrennt. Die x -Komponente der energetischen Kraft, welche die entfernte Kugel k auf die Kugel g ausübt, wird

$$(a) \quad X_{kg}^e = -q \dot{\alpha}_k \dot{E}_g - q \left\{ (\dot{\alpha}_\alpha)_k \dot{F}_g + (\dot{\alpha}_\beta)_k \dot{G}_g + (\dot{\alpha}_\gamma)_k \dot{H}_g \right\}.$$

Drücken wir $\dot{\alpha}_k, (\dot{\alpha}_\alpha)_k, \dots$ als die Ableitungen nach a_g, b_g, c_g von $(\varphi_k)_g$ aus, so wird

$$(b) \quad \begin{aligned} X_{kg}^e &= -q \dot{E}_g \frac{\partial \varphi_k}{\partial a_g} - q \left\{ \dot{F}_g \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial a_g^2} + \dot{G}_g \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial a_g \partial b_g} + \dot{H}_g \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial a_g \partial c_g} \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial a_g} \left\{ -q \left[\dot{E}_g \varphi_k + \dot{F}_g \frac{\partial \varphi_k}{\partial a_g} + \dot{G}_g \frac{\partial \varphi_k}{\partial b_g} + \dot{H}_g \frac{\partial \varphi_k}{\partial c_g} \right] \right\}, \end{aligned}$$

wobei in Bezug auf die Schreibweise die Bemerkung 166(e) zu beachten ist. In der Parenthese wird die Operation χ_g auf die Funktion φ_k angewendet. φ_k entsteht wieder durch Anwendung der Operation χ_k auf $-\frac{1}{4\pi r_{kg}}$. Da sich die zwei Minuszeichen aufheben, finden wir also, daß X_{kg}^e die partielle Ableitung nach a_g von der Funktion

$$(c) \quad \Psi_{kg} = q \chi_g \chi_k \frac{1}{4\pi r_{kg}}$$

ist. Ψ_{kg} , welches explicite die Form 167(e) hat, stellt also eine Kräftefunktion dar, von welcher man die Komponenten der auf die Kugel g wirkenden Energiekraft durch partielle Ableitungen nach den Koordinaten a_g, b_g, c_g finden kann:

$$(d) \quad X_{kg}^e = \frac{\partial \Psi_{kg}}{\partial a_g}, \quad Y_{kg}^e = \frac{\partial \Psi_{kg}}{\partial b_g}, \quad Z_{kg}^e = \frac{\partial \Psi_{kg}}{\partial c_g}.$$

171. Verschiedene Ausdrücke der inducierenden Fernkraft. — Die x -Komponente derjenigen inducierenden Kraft, mit der die Kugel k die Kugel g angreift, ist

$$(a) \quad X_{kg}^i = \frac{3}{2} q \frac{d}{dt} (E_g \dot{\alpha}_k).$$

Drücken wir hier $\dot{\alpha}_k$ durch $(\varphi_k)_g$ aus, so wird

$$(a') \quad X_{kg}^i = \frac{3}{2} q \frac{d}{dt} \left(E_g \frac{\partial \varphi_k}{\partial \alpha_g} \right).$$

Wir bemerken, daß wir von dem letzten Ausdrucke zu einem anderen gelangen können, in den wieder die eben gefundene Funktion Ψ_{kg} eingeht, doch jetzt nicht als Kräftefunktion. Beachten wir, daß $\dot{a}_g, \dot{b}_g, \dot{c}_g$ implicate in den Komponenten $\dot{F}_g, \dot{G}_g, \dot{H}_g$ des Aktionsmomentes vorkommen, so sehen wir, daß nach 166 (a)

$$(b) \quad \frac{\partial \dot{F}_g}{\partial \dot{a}_g} = \frac{\partial \dot{G}_g}{\partial \dot{b}_g} = \frac{\partial \dot{H}_g}{\partial \dot{c}_g} = \frac{3}{2} E_g,$$

und daß im übrigen die Ableitungen von \dot{F}_g nach \dot{b}_g oder \dot{c}_g , von \dot{G}_g nach \dot{a}_g und \dot{c}_g und von \dot{H}_g nach \dot{a}_g und \dot{b}_g gleich Null sind. Benutzen wir dies und differenzieren 167 (e) nach \dot{a}_g , so ergibt sich, wie man leicht erkennt:

$$(c) \quad \frac{\partial}{\partial \dot{a}_g} \left(\chi_k \chi_g \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right) = \frac{3}{2} E_g \frac{\partial}{\partial \alpha_g} \chi_k \frac{1}{4\pi r_{kg}} = -\frac{3}{2} E_g \frac{\partial \varphi_k}{\partial \alpha_g}.$$

Unter Benützung der Funktion Ψ_{kg} können also die Komponenten $X_{kg}^i, Y_{kg}^i, Z_{kg}^i$ in der Form

$$(d) \quad X_{kg}^i = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \Psi_{kg}}{\partial \dot{c}_g}, \quad Y_{kg}^i = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \Psi_{kg}}{\partial \dot{b}_k}, \quad Z_{kg}^i = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \Psi_{kg}}{\partial \dot{b}_g}$$

geschrieben werden.

Die Haupteigenschaft der Induktionskraft, wonach sie als eine totale Ableitung nach der Zeit auftritt, ist aus diesen Formeln explicite ersichtlich, und wir werden deshalb (d) als den fundamentalen Ausdruck der inducierenden Fernkraft betrachten. Eine andere Form, wonach diese Kraft nicht als Zeitableitung, sondern als eine potentielle Vektorgröße dargestellt wird, hat aber auch Interesse. In (a') können nämlich die beiden Ableitungen nach t und nach α_g untereinander vertauscht werden. X_{kg}^i wird dann als eine Ableitung nach α_g einer Funktion Ψ_{kg}^i hervortreten:

$$(e) \quad \Psi_{kg}^i = \frac{3}{2} q \frac{d}{dt} (E_g \varphi_k).$$

Gleichzeitig werden die Komponenten Y_{kg}^i und Z_{kg}^i die entsprechenden Ableitungen nach b_g und c_g , so daß Ψ_{kg}^i die Kräftefunktion der inducierenden Fernkraft wird:

$$(f) \quad X_{kg}^i = \frac{\partial \Psi_{kg}^i}{\partial a_g}, \quad Y_{kg}^i = \frac{\partial \Psi_{kg}^i}{\partial b_g}, \quad Z_{kg}^i = \frac{\partial \Psi_{kg}^i}{\partial c_g}.$$

172. Unabhängigkeit der Wirkung der Kraft von der Bewegung des Angriffspunktes. — Wir bringen den Ausdruck der Kräftefunktion Ψ_{kg}^i auf eine etwas mehr entwickelte Form durch teilweise Ausführung der Differentiation nach der Zeit. Dabei verfahren wir wie schon einmal früher (79): die Glieder, welche durch Differentiation nach dem in den Koordinaten $a_g, b_g, c_g, a_k, b_k, c_k$ enthaltenen t entstehen, scheiden wir für sich aus, und bezeichnen durch $\frac{\delta}{\delta t}$ eine Differentiation nach demjenigen t , welches nicht in diesen Koordinaten enthalten ist. Es ergibt sich dann

$$(a) \quad \begin{aligned} \Psi_{kg}^i &= \frac{3}{2} q E_g \frac{\delta \varphi_k}{\delta t} + \frac{3}{2} q \dot{E}_g \varphi_k \\ &+ \frac{3}{2} q E_g \left\{ \dot{a}_g \frac{\partial \varphi_k}{\partial a_g} + \dot{b}_g \frac{\partial \varphi_k}{\partial b_g} + \dot{c}_g \frac{\partial \varphi_k}{\partial c_g} \right\} \\ &+ \frac{3}{2} q E_g \left\{ \dot{a}_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial a_k} + \dot{b}_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial b_k} + \dot{c}_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial c_k} \right\}. \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile können wir die Produkte der Geschwindigkeitskomponenten $\dot{a}_g, \dot{b}_g, \dot{c}_g$ in $\frac{3}{2} E_g$ durch $\dot{F}_g, \dot{G}_g, \dot{H}_g$ ersetzen. Scheiden wir zugleich aus dem letzten Gliede der ersten Zeile das Glied $q \dot{E}_g \varphi_k$ aus, so wird dasselbe mit der zweiten Zeile zusammengekommen $q \chi_g \varphi_k$ oder $-q \chi_g \chi_k \frac{1}{4\pi r_{kg}}$ ausmachen. Also

$$(b) \quad \begin{aligned} \Psi_{kg}^i &= \frac{3}{2} q E_g \frac{\delta \varphi_k}{\delta t} + \frac{1}{2} q \dot{E}_g \varphi_k \\ &- q \chi_k \chi_g \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \frac{3}{2} q E_g \left\{ \dot{a}_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial a_k} + \dot{b}_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial b_k} + \dot{c}_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial c_k} \right\}. \end{aligned}$$

Wir können jetzt zu dieser Kräftefunktion die in 170(c) gegebene Kräftefunktion der Energiekraft addieren. Es ergibt sich dann

$$(c) \quad \Omega_{kg} = \frac{3}{2} q E_g \frac{\delta \varphi_k}{\delta t} + \frac{1}{2} q \dot{E}_g \varphi_k + \frac{3}{2} q E_g \left\{ \dot{a}_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial a_k} + \dot{b}_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial b_k} + \dot{c}_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial c_k} \right\}$$

als Kräftefunktion der totalen Fernkraft, mit der die Kugel k auf die Kugel g wirkt.

Nun ist zu beachten, daß φ_k , oder vollständiger $(\varphi_k)_g$, das in 166(d) gegeben ist, die kinematischen Parameter \dot{E}_k , \dot{F}_k , \dot{G}_k , \dot{H}_k der Kugel k enthält, welche die Kraft ausübt, nicht aber diejenigen der Kugel g , die die Kraft erleidet. Die Ableitungen von φ_k nach a_k , b_k , c_k werden auch nur dieselben kinematischen Parameter der Kugel k , und das Glied $\frac{\delta \varphi_k}{\delta t}$ nur die Zeitableitungen dieser Parameter enthalten. Da nämlich diese Ableitung nicht das in a_g , b_g , c_g , a_k , b_k , c_k enthaltene t berühren soll, werden keine Zeitableitungen dieser Koordinaten auftreten. Der einzige im gefundenen Potentialausdrucke auftretende kinematische Parameter der Kugel g ist also die Volumänderungsgeschwindigkeit \dot{F}_g ; diese hat aber mit der Bewegung des Angriffspunktes der Kraft, welcher der Mittelpunkt der Kugel ist, nichts zu thun, und wir können den Schluß ziehen:

Die hydrodynamische Fernkraft wirkt unabhängig von der Geschwindigkeit des Angriffspunktes.

Dieselbe Eigenschaft schreibt man bekanntlich schon seit GALILEI den Kräften der Natur zu. In den NEWTON'schen Bewegungsgesetzen ist sie nicht explicite erwähnt. Man betrachtet sie aber im allgemeinen als in dem zweiten Bewegungsgesetze implicite enthalten, weil eine Abhängigkeit der Kraft von der Geschwindigkeit des Angriffspunktes dort nicht erwähnt ist.

Man muß sich aber nicht durch diese gewöhnliche Interpretation des zweiten Bewegungsgesetzes verleiten lassen, das jetzt gefundene Resultat als schon in dem dem zweiten Bewegungsgesetze entsprechenden Satz 165 enthalten zu betrachten. Denn dieser Satz entspricht nach seiner Ableitung nur dem positiven Inhalte des zweiten Bewegungsgesetzes, nämlich der Meßbarkeit der Kraft durch die Änderung der Bewegungsgröße. Alle negativen Eigenschaften der Kraft müssen besonders abgeleitet werden.

Es ist im Anschluß hieran auch wichtig, zu beachten, daß wir den Satz nur für die totale hydrodynamische Fernkraft, und nicht getrennt für die energetische und die inducierende Partialkraft abge-

leitet haben. Für diese Partialkräfte ist er nicht mehr gültig. Denn wie die Ausdrücke 170 (d) und 171 (d) dieser Kräfte in Verbindung mit dem Ausdrucke 170 (c) der Funktion Ψ_{kg} zeigen, enthalten die Partialkräfte jede für sich die Aktionsmomente \dot{P}_g , \dot{G}_g , \dot{H}_g und folglich auch die Geschwindigkeitskomponenten derjenigen Kugel, auf welche die Kraft wirkt.

Fünfter Abschnitt.

Das Gegenwirkungsprinzip für die hydrodynamischen Fernkräfte niederer Ordnung.

173. Momentane Wirkung der Kräfte. — Ehe wir zu der allgemeinen Untersuchung der hydrodynamischen Fernkräfte in Bezug auf Wirkung und Gegenwirkung übergehen, machen wir darauf aufmerksam, daß diese Kräfte infolge der Unzusammendrückbarkeit der Flüssigkeit momentan in allen Abständen wirken. Diese Eigenschaft wird in der rationellen Mechanik den Fernkräften stillschweigend beigelegt. Denn wollte man eine Fortpflanzungszeit voraussetzen, so würde das Gegenwirkungsprinzip nicht mehr ohne weiteres einen Sinn haben.

Eine erste Vorbedingung für die Möglichkeit der Erfüllung des Gegenwirkungsprinzips liegt somit vor. Denken wir uns aber die Inkompressibilität nur als eine angenäherte, so wirken die Kräfte nicht mehr momentan, sondern haben eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Schon aus diesem Grunde kann also das Gegenwirkungsprinzip in seiner Anwendung auf hydrodynamische Fernkräfte illusorisch werden, aber genau in derselben Weise, wie bei seiner Anwendung auf diejenigen Kräfte der Natur, für welche eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit nachgewiesen ist.

174. Wirkung und Gegenwirkung für die energetische Fernkraft. — Das Potential 172 (c) für die gesamte Fernwirkung, welche die Kugel k auf die Kugel g ausübt, war also von der Geschwindigkeit der Kugel g , welche die Wirkung erleidet, unabhängig, dagegen von der Geschwindigkeit der Kugel k , welche die Wirkung ausübt, abhängig. Umgekehrt ist die Gegenwirkung von g auf k von der Geschwindigkeit von k unabhängig, aber von derjenigen von g

abhängig. Hieraus ersieht man sofort, daß Wirkung und Gegenwirkung alle möglichen Beziehungen zu einander haben können, und im allgemeinen nicht gleich und entgegengesetzt sind.

Jetzt wollen wir aber untersuchen, wie es sich in dieser Beziehung mit der inducierenden und der energetischen Partialkraft verhält. Die Kräftefunktion Ψ_{kg} für die energetische Wirkung der Kugel k gegen die Kugel g ist in 170(c) gegeben. Nach Symmetrie kann man die Kräftefunktion für die Rückwirkung der Kugel g auf die Kugel k bilden, und man findet ohne Schwierigkeit, wegen der symmetrischen Natur der zusammengesetzten Operation $\chi_g \chi_k$, daß man in beiden Fällen dieselbe Funktion Ψ_{kg} oder Ψ_{gk} benutzen kann:

$$(a) \quad \Psi_{kg} = q \chi_g \chi_k \frac{1}{4\pi r_{kg}},$$

nur daß man nach a_g, b_g, c_g differentiirt, um die Wirkung gegen die Kugel g , und nach a_k, b_k, c_k , um die Wirkung gegen die Kugel k zu finden. Nun ist aber Ψ_{kg} eine Funktion der Differenzen $a_g - a_k, b_g - b_k, c_g - c_k$, so daß wir

$$(b) \quad \frac{\partial \Psi_{kg}}{\partial a_g} = - \frac{\partial \Psi_{kg}}{\partial a_k}, \quad \frac{\partial \Psi_{kg}}{\partial b_g} = - \frac{\partial \Psi_{kg}}{\partial b_k}, \quad \frac{\partial \Psi_{kg}}{\partial c_g} = - \frac{\partial \Psi_{kg}}{\partial c_k}$$

haben. Auf der linken Seite stehen hier die Komponenten der Wirkung der Kugel k gegen die Kugel g , und auf der rechten die Komponenten der Gegenwirkung der Kugel g gegen die Kugel k . Da die letzteren mit dem negativen Vorzeichen auftreten, können wir also im Anschlusse an NEWTON's eigene Formulierung des dritten Bewegungsgesetzes das folgende, für unser Kugelsystem geltende Gesetz aufstellen:

Die energetische Wirkung ist stets der energetischen Gegenwirkung gleich, oder die energetischen Wirkungen zweier Kugeln aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

175. Bemerkung zu dem dritten Bewegungsgesetze. — Man pflegt oft etwas mehr in das dritte Bewegungsgesetz hineinzulegen, als nach der oben gegebenen, sich an die NEWTON'sche anschließenden Formulierung ausdrücklich darin enthalten ist. Man fügt nämlich hinzu, oder setzt als darin implicite enthalten voraus das Prinzip, daß die elementare Fernwirkung zwischen zwei Massenpunkten immer längs der Verbindungslinie der beiden Punkte gerichtet ist.

Daß NEWTON es so gemeint habe, folgt weder aus seiner eigenen

Fassung des Gesetzes, noch aus den Überlegungen, die er nach der Aufstellung desselben anstellt, sondern kann eventuell nur dadurch begründet werden, daß er dasselbe später nur auf Fernkräfte centraler Natur anwendet. Wie es sich aber auch damit verhalten mag, später ist man auf Schwierigkeiten gestoßen bei den Versuchen, alle Fernkräfte der Natur auf Elementarkräfte centraler Natur zurückzuführen, so daß die ursprüngliche NEWTON'sche Formulierung wieder den Vorzug erhalten hat.

Nur bei dieser allgemeinsten Fassung des Prinzips bleibt dasselbe für die hydrodynamische Energiekraft gültig. Allerdings begegnet man unter den hydrodynamischen Fernkräften auch Kräften centraler Natur. Betrachtet man zwei volumändernde Kugeln, so ist alles um die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Kugeln symmetrisch, und die Kräfte müssen auch längs dieser Verbindungslinie wirken. Dasselbe wird der Fall sein, wenn sich die Kugeln längs ihrer Verbindungslinie bewegen.

Erinnert man sich aber daran, daß die Energiekraft gegen die volumändernde Kugel längs der Stromlinien des ursprünglichen Feldes gerichtet ist, so findet man, daß die Energiekraft, welche eine fortschreitende Kugel auf eine volumändernde ausübt, längs Kurven wie diejenigen der Figur 7 gerichtet ist. Die Kraft wird dann eine von der Verbindungslinie der Kugeln ganz unabhängige Richtung haben.

Allerdings kann man sich diesen Fall wieder auf den centraler Kräfte zurückgeführt vorstellen, da man die fortschreitende Kugel durch zwei volumändernde Kugeln ersetzt denken kann. Die Vorstellung von Elementarkräften centraler Natur darf man jedoch nur bildlich benutzen, denn die wirklich auftretenden Kräfte sind nicht Centralkräfte. Wir werden deshalb das Reaktionsprinzip nur in seiner allgemeinsten Fassung anwenden.

176. Kräftefunktion für die energetischen Wechselwirkungen im Kugelsysteme. — Nachdem wir das Gegenwirkungsprinzip für die energetischen Fernkräfte erkannt haben, können wir eine Kräftefunktion für sämtliche energetischen Wechselwirkungen im Kugelsystem aufstellen.

Die Kräftefunktion für die Wirkung, welche die $n - 1$ entfernten Kugeln k auf die Kugel g ausüben, ergibt sich zunächst unmittelbar nach dem Superpositionsprinzip:

$$(a) \quad \psi_g = \sum_{k \geq g}^k \psi_{kg}.$$

Die Ableitungen dieses Ψ_g nach a_g, b_g, c_g geben die Komponenten der Resultantkraft, mit der die $n - 1$ Kugeln k die Kugel g angreifen.

Schließlich können wir auch g zum beweglichen Index werden lassen und nach g summieren. Da aber bei dieser Summation jede Kugel einmal als eine Kugel g , und einmal als eine Kugel k auftritt, und somit zweimal gerechnet wird, multiplicieren wir gleichzeitig mit $\frac{1}{2}$. Also:

$$(b) \quad \Psi = \frac{1}{2} \sum_g \sum_{g \geq k} \Psi_{kg}.$$

Greifen wir aus dieser Doppelsumme wieder nur diejenigen Glieder aus, welche ein bestimmtes g enthalten, so kommen wir zu der einfachen Summe (a) zurück. Die Ableitungen von Ψ nach bestimmten a_g, b_g, c_g sind deshalb identisch mit den Ableitungen von Ψ_g nach diesen a_g, b_g, c_g .

Alle energetischen Kraftwirkungen in unserem Kugelsysteme lassen sich also durch die Funktion Ψ ausdrücken: die Ableitungen nach a_g, b_g, c_g geben die Kraftkomponenten gegen eine ganz beliebige Kugel g :

$$(c) \quad X_g^e = \frac{\partial \Psi}{\partial a_g}, \quad Y_g^e = \frac{\partial \Psi}{\partial b_g}, \quad Z_g^e = \frac{\partial \Psi}{\partial c_g}.$$

Führen wir den Wert 170(c) von Ψ_{kg} ein, so wird der Ausdruck der Kräftefunktion:

$$(d) \quad \Psi = \frac{1}{2} q \sum_g \sum_{g \geq k} \chi_g \chi_k \frac{1}{4\pi r_{kg}},$$

wobei man sich an die in 167 gegebene Definition der Operationen χ_g und χ_k sowie $\chi_g \chi_k$ zu erinnern hat.

Man bemerkt, daß diese Kräftefunktion ein homogenes Polynom zweiten Grades in den 4 n Parametern $\dot{E}_g, \dot{F}_g, \dot{G}_g, \dot{H}_g$ des Kugelsystems ist. Geht man zu den damit proportionalen Geschwindigkeitskomponenten $\dot{a}_g, \dot{b}_g, \dot{c}_g, \dot{d}_g$ über, so wird sie zu einer quadratischen Form in diesen Variablen, nur mit etwas anderen Koeffizienten. Die Kräftefunktion der energetischen Wechselwirkungen im Kugelsysteme ist also immer eine quadratische Form in den kinematischen Parametern des Kugelsystems. Die Koeffizienten dieser quadratischen Form sind Funktionen der geometrischen Parameter des Kugelsystems, und zwar treten dabei die Radien d_g

in ihren absoluten Werten, die Koordinaten der Kugelmittelpunkte nur in den Differenzen $a_k - a_g$, $b_k - b_g$, $c_k - c_g$ als Variablen auf. Man vergleiche bei dieser Gelegenheit die entsprechenden Eigenschaften 39 und 40 des Geschwindigkeitspotentials.

177. Nichtgültigkeit des Gegenwirkungsprinzips für die Induktionskraft. — Da das Reaktionsprinzip, wie wir gesehen haben, nicht für die fernwirkende Gesamtkraft gültig ist, sondern nur für die energetische Partialkraft, können wir, wenn wir zu der Betrachtung der Induktionskraft übergehen, unmittelbar folgenden Schluß ziehen:

Für die hydrodynamische Induktionskraft ist das Prinzip von der gleichen Wirkung und Gegenwirkung nicht gültig.

Diese negative Eigenschaft der inducierenden Fernkraft geht auch unmittelbar aus der Form 171 (d) dieser Kraft hervor. Die x -Komponenten der von k gegen g und der von g gegen k wirkenden Kräfte werden nämlich

$$(a) \quad X_{kg}^i = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \Psi_{kg}}{\partial \dot{a}_g}, \quad X_{gk}^i = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \Psi_{kg}}{\partial \dot{a}_k}.$$

Die Größen $\dot{a}_g, \dot{b}_g, \dot{c}_g$ treten nicht, wie die Größen a_g, b_g, c_g , in Verbindungen von der Form $\dot{a}_g - \dot{a}_k, \dot{b}_g - \dot{b}_k, \dot{c}_g - \dot{c}_k$ in der Funktion Ψ_{kg} auf, sondern in solchen Verbindungen, daß die Ableitungen nach \dot{a}_g und \dot{a}_k im allgemeinen zu ganz verschiedenen Resultaten führen, wie die explicite Ausrechnung sofort zeigt.

Wir machen gleichzeitig die Bemerkung, daß die Summen der inducierenden Kräfte, welche die $n - 1$ Kugeln k gegen die Kugel g ausüben, nach dem Superpositionsprinzip die Komponenten

$$(b) \quad X_g^i = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \Psi_g}{\partial \dot{a}_g}, \quad Y_g^i = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \Psi_g}{\partial \dot{b}_g}, \quad Z_g^i = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \Psi_g}{\partial \dot{c}_g}$$

haben, wo Ψ_g der Ausdruck 176 (a) ist. Dies kann wieder

$$(c) \quad X_g^i = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{a}_g}, \quad Y_g^i = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{b}_g}, \quad Z_g^i = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{c}_g}$$

geschrieben werden, wo Ψ die Kräftefunktion 176 (b) der energetischen Wechselwirkungen im Kugelsystem ist. Denn greifen wir aus diesem Ψ diejenigen Glieder heraus, welche ein bestimmtes $\dot{a}_g, \dot{b}_g, \dot{c}_g$ enthalten, so kommen wir auf Ψ_g zurück, so daß Ψ und Ψ_g dieselben Ableitungen nach $\dot{a}_g, \dot{b}_g, \dot{c}_g$ haben, also dieselben Kraftkomponenten X_g^i, Y_g^i, Z_g^i liefern.

Die inducierenden Kräfte im Kugelsystem können also auch aus der Funktion Ψ abgeleitet werden: während man die energetische Kraft gegen eine Kugel g durch Ableitung nach den Koordinaten a_g, b_g, c_g der Kugel g findet, bestimmt man die inducierende durch partielle Ableitung nach den Geschwindigkeitskomponenten $\dot{a}_g, \dot{b}_g, \dot{c}_g$ und nachträgliche Ableitung nach der Zeit und Multiplikation mit -1 .

Für die in letzterer Weise gefundene Kraft ist das Gegenwirkungsprinzip nicht gültig. Unser Beobachter, welcher die Mechanik des Kugelsystems experimentell studiert, wird also zu dem Resultat kommen, daß dieselbe nicht mit der NEWTON'schen Mechanik identisch ist, vorausgesetzt, daß er die Wirkungen der Induktionskraft wahrnehmen kann. Die Wahrnehmbarkeit der Wirkungen der Induktionskraft werden wir deshalb jetzt untersuchen.

178. Die auf verborgenen Bewegungen beruhende Induktionskraft. — Da die Induktionskraft die Form einer totalen Ableitung nach der Zeit hat, sind wir im stande gewesen, die von der Induktionskraft erzeugte Geschwindigkeit zu bestimmen. Dieselbe war durch den augenblicklich vorhandenen Bewegungszustand, in Verbindung mit den Dichtigkeiten von Kugel und Flüssigkeit, eindeutig bestimmt und von allen vorhergehenden Zuständen des Systems unabhängig [92(C)]. Betrachten wir besonders die fremdinducierte, oder die durch die inducierende Fernkraft erzeugte Geschwindigkeit, so finden wir sie zu jeder Zeit gleich der Geschwindigkeit $(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$, welche der Einfallsstrom im Mittelpunkte der Kugel hat, multipliziert mit dem Koeffizienten der fremdinducierten Geschwindigkeit. Man beachte dabei, daß wir uns die Bewegungen der Kugel und des Einfallsstromes als einander ungestört superponiert vorstellen (107). Das Resultat ist in 108 allerdings nur für den Fall diskutiert, daß der Einfallsstrom ein Parallelstrom ist. Die Gleichungen 106(b) aber, welche den Satz enthalten, sind allgemeingültig; man hat nur wegen den Ortsveränderungen der Kugel mit immer neuen Geschwindigkeiten $(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$ zu thun.

Durch periodische Wiederholung einer Bewegung wird es deshalb nicht gelingen, der Kugel steigende inducierte Geschwindigkeiten mitzuteilen. In demselben Augenblicke, wo die Bewegung der entfernten Kugeln und damit die Bewegung des Einfallsstromes aufhört, hört auch die inducierte Bewegung der Kugel auf. Die Induktionskraft wird also nie eine Bewegung hinterlassen können: ehe sie zu wirken aufhört, zerstört sie die Bewegung, welche sie während der Periode ihrer Thätigkeit erzeugt hat. Es hilft nichts,

die Bewegungen intensiver zu machen; allerdings wird die Kraft dadurch intensiver, aber um so schneller wird auch die Periode der negativen Thätigkeit der Kraft auf die Periode der positiven Thätigkeit folgen.

Der Nachweis einer Kraft, welche in dieser eigentümlichen Weise ihre eigenen Wirkungen zerstört, wird natürlich bedeutende Schwierigkeiten haben. Er wird nur möglich sein, wenn die während der Thätigkeitsperiode der Kraft auftretenden Verschiebungen meßbare Werte erreichen.

Wir denken uns dabei erst, daß der scheinbar statische Bewegungszustand (41) vorliegt. Die Größenordnung der Verschiebungen läßt sich dann schätzen. Denn in der ersten Annäherung können wir den Einfallstrom, worin sich die Kugel g befindet, als einen Parallelstrom betrachten und den Satz 109 verwenden. Die Kugel wird also unter dem Einflusse der Induktionskraft eine ähnliche Bahn wie ein Partikelchen dieses Einfallstromes durchlaufen. Diese Bahn haben wir aber bestimmt (49); sie war eine LISSAJOUS'sche Kurve allgemeinsten Natur. Da weiter die Bewegung in der Flüssigkeit mit dem Abstand von den Oberflächen der bewegenden Kugeln abnimmt, und nie in der Flüssigkeit, sondern nur an den Grenzflächen Maxima haben kann, so wird die Bewegung des betreffenden Flüssigkeitspartikelchens notwendig mit kleineren Amplituden verlaufen, als die Bewegungen der Flüssigkeitspartikelchen an den Oberflächen der Kugeln. Verlaufen also die Bewegungen der wirkenden Kugeln mit nicht beobachtbaren Amplituden, so werden auch alle Teilchen der ganzen Flüssigkeit sich mit nicht beobachtbaren Amplituden bewegen. Da schließlich die Dimensionen der Bahn der Kugel g höchstens das dreifache von den Dimensionen der Bahn der zum Vergleich dienenden Flüssigkeitspartikelchen sein kann (109), wird die inducierte Bewegung der Kugel g nicht mit beobachtbaren Amplituden verlaufen. Also:

Die auf verborgenen Bewegungen beruhende Induktionskraft kann wieder nur verborgene Bewegung erzeugen.

179. Die auf sichtbaren Bewegungen beruhende Induktionskraft. — Da die auf verborgenen Bewegungen beruhende Induktionskraft keine meßbaren Verschiebungen erzeugen kann, wird die nächste Frage sein, ob nicht vielleicht bei sichtbaren Bewegungen des Kugelsystems meßbare Verschiebungen eintreten können, beispielsweise wenn große, zu Körpern gruppierte Scharen der Kugeln

Bewegungen ausführen, die mit großen Ortsveränderungen verbunden sind.

Die Größenordnung der eintretenden Verschiebungen können wir wieder nach der größten Verschiebung eines Flüssigkeitspartikelchens schätzen. Zur Bestimmung dieser letzten Verschiebung bemerken wir, daß die Bewegung des Flüssigkeitspartikelchens durch die Bewegung der Kugeln eindeutig bestimmt ist. Die totale Verschiebung, welche ein Flüssigkeitspartikelchen erleidet, wenn sich die Kugelgruppe von einer Stelle zu einer anderen bewegt, ist deshalb nur von der Anfangs- und der Endlage der Kugeln abhängig, und ganz unabhängig davon, wie die Kugelgruppe von der einen Lage zu der anderen gekommen ist. Wir können uns dann einfach denken, daß die Kugeln auf der ersten Stelle zu Null kontrahiert werden, dann in die neuen Lagen gebracht und hier zu ihren alten Größen erweitert werden. Die Bewegung der Kugelgruppe oder des Körpers k aus dem unendlich Fernen in die möglichst große Nähe der Kugel g wird deshalb dieselbe Verschiebung erzeugen, als ob der Körper k in der letzten Lage plötzlich in der Weise entstünde, daß die Radien aller Moleküle von Null zu den Werten d_k anwachsen. Bei dieser Entstehung des Körpers wird aber durch seine Grenzflächen ein Flüssigkeitsquantum, gleich der Summe der Volumina der Kugeln, herausfließen. Nehmen wir nun beispielsweise an, daß das Verhältnis der Kugelradien zu den Centraldistanzen das Verhältnis 1 : 100 nicht übersteigt, so wird die Summe der Volumina der Kugeln zum Volumen des Körpers ein Verhältnis von der Größenordnung 1 : 1000000 haben. In einem Körper von der Größe eines Kubikmeters wird die Summe der Volumina der Kugeln einen Kubikcentimeter ausmachen. Der Ausfluß von einem Kubikcentimeter Flüssigkeit durch die Oberfläche des Körpers wird dann Verschiebungen der Flüssigkeitspartikelchen veranlassen, die nur ein paar Zehntausendstel eines Millimeters ausmachen. Erst wenn man diesem Körper die vierfachen linearen Dimensionen, also 64 Kubikmeter Inhalt giebt, wird die Verschiebung die Länge der roten Lichtwellen erreichen. Selbst wenn man nicht kleinere Verhältniszahlen wie 1 : 100 zwischen Kugelradien und Centraldistanzen zu Grunde legt, muß man also Körper von ganz unhandlichen Dimensionen bewegen, um die Wirkungen der Induktionskraft nachweisen zu können. Wir können also schließen:

Wenn die Radien der Kugeln hinlänglich klein sind im Verhältnis zu den Centraldistanzen, werden auch die auf den sichtbaren Bewegungen der Körper beruhenden Wirkungen der Induktionskraft nicht beobachtbar sein.

180. Das Gegenwirkungsprinzip und die sichtbaren Bewegungen des Kugelsystems. — Nach diesen Überlegungen sind wir also berechtigt, zu schliessen, daß alle progressiven und folglich sichtbaren Bewegungen im Kugelsystem nur von der Wirkung der Energiekraft herrühren können. Das thatsächliche Vermögen dieser Kraft, solche Bewegungen zu erzeugen, haben wir schon bei der rein hydrodynamischen Diskussion dieser Kraft nachgewiesen (126). Obgleich die Induktionskraft außerordentlich viel stärker sein kann als die Energiekraft (123, 124), so daß die thatsächlichen Abweichungen von dem Gegenwirkungsprinzip beliebig grose Werte erreichen können, sind wir doch berechtigt, den folgenden Schluß zu ziehen:

Die sichtbaren Bewegungen im Kugelsystem verlaufen so, als ob das Prinzip von der gleichen Wirkung und Gegenwirkung immer erfüllt wäre.

181. Unabhängigkeit der Kraft von den progressiven Geschwindigkeiten beider wirkenden Kugeln. — Das somit nachgewiesene Gegenwirkungsprinzip für die sichtbaren Bewegungen im Kugelsystem hat eine wichtige Konsequenz, wenn wir zu dem früher gefundenen Prinzip der Unabhängigkeit der Kraft von der Bewegung des Angriffspunktes zurückkehren.

Unser Schluß war damals, daß die Kraft zwar von der Geschwindigkeit desjenigen Körpers unabhängig war, auf welchen die Kraft wirkte, nicht aber von der Geschwindigkeit desjenigen Körpers, welcher die Kraft ausübte. Und zwar hatte dieses Resultat nur Gültigkeit für die Gesamtkraft, nicht für die Induktionskraft und die Energiekraft als getrennte Partialkräfte.

Jetzt haben wir gefunden, daß sich die Wirkung der Induktionskraft der Beobachtung entzieht, und daß für die sichtbaren Bewegungen das Prinzip von der gleichen Wirkung und Gegenwirkung gültig ist. Da das Gegenwirkungsprinzip nicht mit der Abhängigkeit der Wirkung von der Geschwindigkeit des einen, und der Gegenwirkung von der Geschwindigkeit des anderen Körpers verträglich ist, können wir unmittelbar den folgenden Schluß ziehen:

Die sichtbaren Bewegungen im Kugelsystem verlaufen so, daß die Wechselwirkung zweier Kugeln von den sichtbaren Bewegungen beider Kugeln unabhängig erscheint.

Da weiter die sichtbaren Bewegungen nur von den Energiekräften herrühren, werden wir das Resultat erhalten, daß die Energiekräfte so wirken, als ob sie von der Geschwindigkeit beider Körper unabhängig wären. Dies gilt nicht mehr, wenn wir die zu jeder

Zeit wirklich vorhandenen Geschwindigkeiten betrachten. Denn von den Oscillationsintensitäten der Kugeln ist die Energiekraft abhängig, wie unsere rein hydrodynamischen Diskussionen gezeigt haben. Wenn aber die Oscillationen von einer progressiven Bewegung begleitet werden, so wird die mittlere Energiekraft, welche die Kugel ausübt oder erleidet, dadurch nicht beeinflusst. Zu demselben Resultat sind wir schon früher in anderer Weise gekommen (137).

Sechster Abschnitt.

Weitere allgemeine Eigenschaften der hydrodynamischen Fernkräfte niederer Ordnung.

182. Das Prinzip von der Erhaltung der Energie in der rationalen Mechanik. — NEWTON hat in seinen drei Bewegungsgesetzen diejenigen Eigenschaften angegeben, welche er als allen bewegenden Kräften der Natur gemeinschaftlich auffasste. Die anderen ihm bekannten Krafteigenschaften, wie etwa die Proportionalität der Schwerkraft mit dem Produkt der Massen, oder das umgekehrt quadratische Abstandsgesetz waren spezielle Eigenschaften spezieller Naturkräfte.

Nach NEWTON'S Zeit ist ein neues Prinzip hinzugefügt worden, welches als notwendige Eigenschaft aller Naturkräfte aufgefaßt wird, nämlich das Prinzip von der Erhaltung der Energie, oder von der konservativen Natur der Kräfte.

Stellt man sich auf den Standpunkt der spezielleren Auffassung des dritten Bewegungsgesetzes, wonach alle Fernkräfte auf centrale Elementarkräfte zurückführbar sind, so ist das Prinzip von der konservativen Natur der Kräfte in den NEWTON'schen Bewegungsgesetzen enthalten. Denn die konservative Natur solcher Fernkräfte läßt sich ganz allgemein ableiten.

Bei der allgemeinsten Auffassung des dritten Bewegungsgesetzes und der entsprechenden allgemeinen Natur der Fernkräfte muß dagegen das Prinzip von der konservativen Natur der Kräfte als ein wesentlich neues Prinzip aufgefaßt werden.

Jetzt werden wir untersuchen, wie es sich in dieser Beziehung mit unserem Kugelsystem verhält.

183. Die konservative Natur der hydrodynamischen Fernkräfte.
 — Der Beweis für die konservative Natur der hydrodynamischen Fernkräfte läßt sich auf der früher angedeuteten formellen Reducierbarkeit dieser Kräfte auf Centralkräfte (175) begründen. Ebenso können wir den Beweis aus dem schon gefundenen Resultat ableiten, daß sie durch Kräftefunktionen darstellbar sind. Es empfiehlt sich aber, wegen der Wichtigkeit dieser Frage, zu den ersten Grundlagen der entwickelten Theorie zurückzugehen.

Die erste Grundlage für die Lösung des rein kinematischen Teiles unserer Aufgabe bildete der Satz, daß der Bewegungszustand der Flüssigkeit zu jeder Zeit eindeutig gegeben ist durch die Lagen und die Bewegungen der eingetauchten Körper (16).

Um auf Grund dieses Satzes unseren Beweis führen zu können, setzen wir voraus, daß jede Kugel zur Zeit t nach der Vollführung einer beliebigen Bewegung durch dieselbe Lage passiert, welche sie zu einer früheren Zeit t_0 passiert hat, und zwar mit identisch derselben Geschwindigkeit als zu dieser früheren Zeit. Wir können dann sagen, daß das Kugelsystem einen Kreisprozeß durchlaufen hat.

Das vollständige System der Kugeln und der Flüssigkeit wird dann zur Zeit t_0 und zur Zeit t genau dieselbe kinetische Energie haben, und diese Energie wird, weil die Bewegung der Flüssigkeit durch die Bewegung der Kugeln eindeutig bestimmt ist, in genau derselben Weise unter Kugeln und Flüssigkeit verteilt sein. Durch einen solchen Kreisprozeß werden also weder Kugeln noch Flüssigkeit Energie gewonnen oder verloren haben, und die äußeren Kräfte, durch welche die Kugeln geführt worden sind, werden nach der Vollführung des Kreisprozesses weder positive noch negative Arbeit geleistet haben.

Während dieses Kreisprozesses sind aber auch die hydrodynamischen Druckkräfte in Thätigkeit gewesen. Die Arbeit dieser Kräfte ist zu jeder Zeit der Arbeit der äußeren Kräfte entgegengesetzt gleich gewesen. Diese Kräfte haben also auch nach dem Verlaufe des vollständigen Kreisprozesses weder positive noch negative Arbeit geleistet. Wir können deshalb ganz allgemein schließen:

Die hydrodynamischen Druckkräfte sind Kräfte konservativer Natur.

Aus der konservativen Natur der hydrodynamischen Druckkräfte folgt man, daß die Energie des Kugelsystems erhalten bleibt, sofern nur die eingreifenden Kräfte nicht hydrodynamischen Ursprungs, auch konservative Kräfte sind. Das Vorhandensein von solchen Kräften nehmen wir ja im allgemeinen an, um die Pulsationen und

Oscillationen der Kugeln zu erklären. Diese Kräfte werden konservativer Natur sein, wenn sie, wie wir im allgemeinen vorausgesetzt haben, auf der Elasticität der einzelnen Kugeln, oder auf elastischen Verbindungen unter den getrennten Kugeln beruhen: sind diese elastischen Kräfte die einzigen eingreifenden Kräfte nicht hydrodynamischen Ursprunges, so bleibt die Energie des Systems konstant.

Diese Ableitung ist von allen unseren expliciten Rechnungen und den darin gemachten Vernachlässigungen kleiner Glieder frei. Ein Beobachter, welcher die Mechanik des Kugelsystems experimentell studiert, wird also dieses Prinzip immer erfüllt finden, sei es, daß er seine Kraft- und Arbeitsmessungen mit niederer oder höherer Genauigkeit anstellt.

Bei den explicite berechneten hydrodynamischen Fernkräften tritt die konservative Natur insofern hervor, als sie als Ableitungen von Kräftefunktionen ausgedrückt werden können. Dieses zeigt, daß sie zu jeder Zeit die den konservativen Kräften eigene räumliche Verteilung besitzen. In den Ausdrücken 170(c) und 171(e) dieser Kräftefunktionen treten aber Funktionen der Zeit, \dot{E} , \dot{F} , \dot{G} , \dot{H} auf. Denkt man sich diese als beliebige Funktionen der Zeit, so werden die Kräfte im allgemeinen trotz der räumlichen Verteilung nicht konservativ sein. Beruhen aber die durch diese Größen beschriebenen Bewegungen auf der Elasticität der Kugeln oder der vielleicht vorhandenen Verbindungen unter denselben, und drücken wir \dot{E} , \dot{F} , \dot{G} , \dot{H} als Funktionen der Verrückungen aus, so wird man zu Kräftefunktionen kommen, welche die konservative Natur der Kräfte explicite hervortreten lassen.

Wenn wir den Fall synchroner Schwingungen permanenter Natur voraussetzen, und die Funktionen der Zeit durch ihren von der Zeit unabhängigen quadratischen Mittelwert ersetzen, so kommen wir auch auf Kräftefunktionen, aus denen die konservative Natur der Kräfte unmittelbar hervorgeht.

184. Über eine Eigenschaft der Kräftefunktionen. — Daß die hydrodynamischen Fernkräfte, insofern sie beobachtbare Bewegungen erzeugen, diejenigen allgemeinen Eigenschaften, also auch die des Konservatismus, besitzen, welche man solchen Kräften in der rationellen Mechanik beilegt, haben wir jetzt allgemein nachgewiesen.

Noch ein paar allgemeine Eigenschaften lassen sich hinzufügen, welche man nicht mehr in der rationellen Mechanik allen Kräften zuschreibt, aber die man doch bei ausgedehnten Klassen von Naturkräften vorfindet.

Zunächst machen wir darauf aufmerksam, daß die entwickelte Kräftefunktion 176 (d) für die energetischen Wechselwirkungen im Kugelsystem in linearer Weise aus Ableitungen des Ausdruckes $\frac{1}{r_{kg}}$ nach a_k, b_k, c_k oder a_g, b_g, c_g zusammengesetzt ist, wie man sofort erkennt, wenn man die Bedeutung der zusammengesetzten Operation $\chi_g \chi_k$ beachtet. Jedes Glied der Kräftefunktion und folglich auch die Kräftefunktion Ψ selbst wird deshalb eine Lösung der Gleichung

$$(a) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a_g^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial b_g^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial c_g^2} = 0$$

sein. Die Kräftefunktion 171 (e) für die induzierende Kraft, mit der eine Kugel k eine Kugel g angreift, hat dieselbe Eigenschaft. Denn das darin enthaltene φ_k ist eine Lösung von (a), und die Differentiationen nach t und nach a_g, b_g, c_g können in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden. Bildet man durch Superposition die Kräftefunktion für die induzierende Gesamtkraft, mit der die $n - 1$ entfernten Kugeln k die Kugel g angreifen, so kommt man wieder zu einer Funktion, welche die Eigenschaft (a) besitzt.

In dieser Gleichung (a) sind a_g, b_g, c_g die Koordinaten des Mittelpunktes derjenigen Kugel, welche die Kraft erleidet. Da eine Kugel nie in eine andere eindringen kann, ist die Eigenschaft (a) auf den Raum außerhalb der wirkenden Kugeln beschränkt. Wir ziehen also den folgenden Schluß, welcher, mit gleichem Recht für Induktionskraft und Energiekraft getrennt, als für die totale hydrodynamische Fernkraft gültig ist:

Überall im Raume außerhalb der wirkenden Kugeln erfüllen die Potentiale der hydrodynamischen Fernkräfte die Laplace'sche Gleichung.

185. Abhängigkeit der Kraft von dem Volumen der Körper. —

Die Kräftefunktion Ψ_{gk} für die energetische Wechselwirkung zweier Kugeln g und k ist eine quadratische Form in den Größen $\dot{E}_g, \dot{F}_g, \dot{G}_g, \dot{H}_g$ und $\dot{E}_k, \dot{F}_k, \dot{G}_k, \dot{H}_k$, und zwar in der Weise, daß nur die rektangulären und nicht die quadratischen Glieder vorkommen, wie die entwickelte Form 167 (e) dieser Funktion zeigt. Nun enthalten die vier ersten dieser Größen das Volumen E_g der Kugel g , die vier letzten das Volumen E_k der Kugel k als Faktor [19 (c) und 68 (c)]. Folglich ist die Kräftefunktion, also auch die daraus durch Differentiation nach den Koordinaten abgeleitete Energiekraft proportional dem Produkt der Volumina der beiden Kugeln. Dasselbe Produkt der Volumina beider Kugeln bleibt erhalten, wenn man durch Diffe-

rentiation nach $\dot{a}_g, \dot{b}_g, \dot{c}_g$ [vergl. 171(b)] und nachträgliche totale Differentiation nach t die inducierende Fernkraft der Kugel g gegen die Kugel k bildet. Also schliefsen wir:

Die hydrodynamische Fernkraft, mit der eine Kugel auf eine andere wirkt, ist proportional dem Produkt der Volumina beider Kugeln.

Diese Eigenschaft hat besonderes Interesse in Verbindung mit den zu NEWTON's Zeit geführten Diskussionen über die Fernwirkungen. Von seiten der Newtonianer wurde als ein prinzipieller Einwand gegen die Ansichten der Kartesianer angeführt, daß die Schwerkraft der Masse und folglich dem Volumen des Körpers proportional ist, während eine von dem Druck eines Mediums herrührende Kraft der Oberfläche des gedrückten Körpers proportional sein müsse. Letzteres ist also nicht allgemein richtig. Der Trugschluss beruht darauf, daß die in einer bestimmten Richtung bewegende Druckkraft nicht dem Druck selbst, sondern dem Drucküberschuß auf der einen Seite der Kugel relativ zu dem anderen proportional ist. Dieser Drucküberschuß wird aber proportional dem Volumen und nicht proportional der Oberfläche der Kugel zunehmen.

186. Zusammenfassung der gefundenen Resultate. — Denken wir uns nun einen Beobachter, welcher die Flüssigkeit nicht sehen kann, aber das Vermögen hat, die Bewegung jeder Kugel in allen Einzelheiten zu verfolgen. Dieser Beobachter würde sehen, daß die Bewegung des Kugelsystems nicht so verläuft, wie die Bewegung eines materiellen Punktsystems unter dem Einflusse gegenseitiger Fernkräfte verlaufen würde, welche diejenigen Eigenschaften besitzen, die man solchen Kräften in der auf der GALILEI-NEWTON'schen Grundlage aufgebauten rationellen Mechanik beilegt. Und zwar würde der Unterschied besonders in drei Punkten hervortreten.

Das Trägheitsprinzip tritt insofern in modificierter Form auf, als das Fortschreiten einer Kugel, welche von den anderen Kugeln genügend entfernt ist, nicht mit konstanter Geschwindigkeit, sondern mit einer gewissen rhythmischen Geschwindigkeit mit konstantem Mittelwert stattfinden würde. Eine ähnliche rhythmische Natur würde die träge Reaktion einer Kugel gegen die Wirkung der von den anderen Kugeln herrührenden Fernkräfte haben.

Die Kraft, welche eine Kugel auf eine andere ausübt, würde zwar von der Geschwindigkeit desjenigen Körpers unabhängig sein, welcher die Wirkung erleidet, nicht aber von der Geschwindigkeit desjenigen, der die Wirkung ausübt.

Das Prinzip von der gleichen Wirkung und Gegenwirkung würde nicht gültig sein.

Nehmen wir dagegen an, daß der Beobachter nur die langsam verlaufenden, progressiven Bewegungen des Systems sehen könne, nicht aber die schnell verlaufenden Schwingungen, und daß er nur die Mittelwerte der Kräfte zu messen im stande sei, nicht aber ihren wirklichen Wert zu jeder beliebigen Zeit, so würde er keine Abweichungen von denjenigen Bewegungen entdecken können, welche die GALILEI-NEWTON'sche Mechanik verlangt.

Wir sind deshalb berechtigt, den folgenden Schluß zu ziehen.

Wir denken uns eine Welt, konstruiert in molekularer Weise aus beliebig vielen Kugeln, die in einer reibungslosen und inkompressiblen Flüssigkeit schwimmen. Die Kugeln dürfen in beliebiger Weise zu Körpern gruppiert sein, und mögen infolge innerer Elasticität in pulsierenden und oscillierenden Bewegungen begriffen sein. Äußere starre oder elastische Verbindungen dürfen auch vorkommen, vorausgesetzt, daß dieselben so fein sind, daß sie die Bewegung der Flüssigkeit nicht stören.

Die Bewohner einer solchen Welt würden durch das Studium der ihnen zugänglichen Bewegungserscheinungen zu dem Resultate kommen, daß unter den getrennten Körpern Wirkungen in die Ferne thätig sind, und daß alle Bewegungen in dieser Welt in Übereinstimmung mit den Prinzipien der GALILEI-NEWTON'schen Mechanik verlaufen.

187. Hertz' Mechanik. — Der Weltmechanismus, den wir uns in dieser Weise vorstellen, ist ein Mechanismus, in dem Fernwirkungen nicht vorkommen, aber wo doch die Fernwirkungsgesetze zu gelten scheinen. Wir wollen dieses Resultat mit demjenigen vergleichen, zu welchem HERTZ in seiner berühmten Mechanik gekommen ist.

HERTZ baut seine Mechanik auf der Vorstellung eines Weltmechanismus auf, wo überall starre Verbindungen bestehen, und wo Wirkungen in die Ferne nicht vorkommen, einem Mechanismus, welcher also in dieser Hinsicht mit dem unserigen wesentliche Züge gemein hat. HERTZ beschränkt sich aber nicht auf die Elimination der Fernkraft, sondern er hat jeden Kraftbegriff von Anfang an als Fundamentalbegriff seiner Mechanik vermieden. Ohne jede Erwähnung der Kraft wird ein Axiom aufgestellt, welches die Bewegung des ganzen Weltmechanismus bestimmt; und erst nachträglich wird die Kraft als eine reine Hilfsvorstellung eingeführt, um es möglich

zu machen, die Bewegung eines bestimmten Teiles des Mechanismus für sich zu beschreiben, ohne jedesmal den gesamten Weltmechanismus in Betracht zu ziehen. Die in dieser Weise als abgeleitete Größen eingeführten Kräfte untersucht HERTZ, beweist, daß sie die in den NEWTON'schen Bewegungsgesetzen enthaltenen Eigenschaften besitzen, und findet, daß sich der abgetrennte Teil des Mechanismus nach den Bewegungsgleichungen der gewöhnlichen Mechanik bewegen muß.

188. Verschiedenartigkeit der erreichten Resultate. — Der Begriff der Kraft wird also in der HERTZ'schen Mechanik in ganz ähnlicher Weise eingeführt, wie der Begriff der scheinbaren Fernkraft in unserer Entwicklung. Eine formelle Übereinstimmung des Gedankenganges und der verwendeten Methode fällt somit sofort auf.

Wie man aber auch bemerkt, besteht gleichzeitig eine wesentliche Verschiedenheit. Die Kräfte, welche wir in unseren hydrodynamischen Problemen eingeführt haben, haben die Natur von Fernkräften, die von bestimmt angebbaren, entfernten Kugeln herühren. Die Kräfte dagegen, deren Eigenschaften HERTZ studiert, sind und bleiben Berührungskräfte. Ihre Beziehungen zu demjenigen Mechanismus, welcher die Kraft erleidet, und zu dem vielleicht unsichtbaren, aber doch als unmittelbar angekoppelt betrachteten Mechanismus, welcher die Kraft ausübt, werden erschöpfend behandelt. Eine Identifizierung der Kräfte mit bestimmten, von bestimmt angebbaren, entfernten Teilen des Mechanismus ausgehenden Fernkräften findet dagegen nicht statt.

HERTZ macht hierauf mit voller Deutlichkeit aufmerksam bei der Ableitung des Prinzips von der gleichen Wirkung und Gegenwirkung.¹ Der Satz wird nur für unvermittelte, nicht für vermittelte Kräfte oder Fernkräfte bewiesen. Dasselbe kann mit gleichem Rechte für die übrigen von HERTZ abgeleiteten Fundamenteigenschaften seiner Kräfte angeführt werden, beispielsweise für das Superpositionsprinzip.² Dasselbe wird auch nur für den Fall einer unmittelbaren Koppelung bewiesen, und es bleibt eine offene Frage, ob es noch seine Gültigkeit bewahren wird, wenn die Kraftkomponenten durch ihren Ursprung in entfernten, indirekt angekoppelten Teilen des Mechanismus definiert werden sollen.

¹ HERTZ, Mechanik, Lehrsatz 468, Anmerkungen 469 und 470.

² HERTZ, Mechanik, Lehrsatz 471.

Solche Eigenschaften müssen in allen Fällen, wo wir ihnen in der Natur begegnen, nach HERTZ als besondere Erfahrungen über besondere Fernkräfte aufgefaßt werden, und von ihrer Herleitung kann erst die Rede sein, wenn genauere Angaben über die Natur des Zusammenhanges zwischen den beiden getrennten Körpern vorliegen.

Diese Angaben über die Natur des Zusammenhanges liegen in dem von uns behandelten Falle vor, weil wir einen Mechanismus bestimmt angegebener Konstruktion vor uns gehabt haben, während HERTZ nach seinem Plane und Ziele die Konstruktion seines Mechanismus absolut allgemein halten mußte. Diese speciellere Natur unserer Aufgabe hat es uns möglich gemacht, die hydrodynamischen Druckkräfte als Fernkräfte bestimmt identifizierbaren Ursprunges behandeln zu können. Dabei hat sich beispielsweise HERTZ' ausdrückliche Reservation gegen die Verwendung des Gegenwirkungsprinzips auf vermittelte Wirkungen als vollständig berechtigt erwiesen. Denn dieses Prinzip hat für die hydrodynamischen Fernkräfte keine allgemeine Gültigkeit. Gleichzeitig haben wir aber zeigen können, daß es für einen Beobachter mit beschränktem Wahrnehmungsvermögen erfüllt scheinen muß.

Ganz allgemein können wir deshalb das Verhältnis der von uns dargelegten hydrodynamischen Untersuchungen zu der HERTZ'schen Mechanik in folgender Weise charakterisieren:

HERTZ hat in seiner Mechanik den ersten Versuch gemacht, eine allgemein gültige Grundlage für solche Vorstellungen zu schaffen, von deren Weiterführung im speziellen unsere Untersuchungen ein Beispiel geben.

Siebenter Abschnitt.

Verifikation der erhaltenen Resultate mit Hilfe der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen.

189. Auffassung des vollständigen Systems der Kugeln und der Flüssigkeit als eines einzigen Mechanismus. — Ehe wir die Diskussionen weiter fortsetzen, wird es zweckmäßig sein, daß wir eine unabhängige Verifikation der erhaltenen Resultate geben, um so mehr, als wir dadurch eine an sich bemerkenswerte Methode zur

Verwendung bringen, welche eben für die Untersuchungen hydrodynamischer Fernkräfte äußerst wertvoll ist.

Die Methode, die wir nach der Erledigung des rein kinematischen Teiles unserer Aufgabe benutzt haben, ist die rein hydrodynamische gewesen. Wir haben den Druck der Flüssigkeit gegen eine Kugel betrachtet, und die daraus hervorgehende Druckkraft berechnet. Wir können aber auch einen anderen Weg einschlagen, wonach wir nicht auf die Betrachtung des Flüssigkeitsdruckes zurückzugreifen brauchen, sondern nur allgemeine dynamische Methoden zur Verwendung bringen. Das ganze System der Kugeln und der Flüssigkeit fassen wir dann als einen einzigen Mechanismus auf. Die Konfiguration und Lage dieses Mechanismus läßt sich durch die $4n$ Koordinaten a_g, b_g, c_g, d_g eindeutig beschreiben. Verändern sich diese Größen in der Zeit, so bewegt sich der Mechanismus, und die Bewegung wird überall in demselben Augenblicke aufhören, in welchem die Veränderung dieser Größen aufhört (16). Die Bewegung eines solchen Mechanismus läßt sich nach LAGRANGE durch $4n$ Bewegungsgleichungen beschreiben, die wir sofort aufschreiben können, wenn wir die kinetische Energie des Systems als Funktion der Koordinaten und der Zeitableitungen der Koordinaten kennen.

Wir können diese Methode auch als die des HAMILTON'schen Prinzips bezeichnen, weil man durch Anwendung dieses Prinzips ebenfalls zu den LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen kommt.

190. Die Energie einer Kugel. — Die Gesamtenergie \mathfrak{E} des Systems wird aus zwei partiellen Energiebeträgen bestehen, der Energie T^0 der Kugeln, und der Energie T der Flüssigkeit:

$$(a) \quad \mathfrak{E} = T^0 + T.$$

Die Energie T^0 zerlegt sich wieder in n Teile, nämlich die Energien T_g^0 der einzelnen Kugeln g :

$$(b) \quad T^0 = \sum_1^n T_g^0.$$

Eine beliebige Kugel g hat nach unseren Voraussetzungen eine zusammengesetzte translatorische und expansive Bewegung, welche das Potential 35(a) oder

$$(c) \quad \Phi_g = a_g(x - a_g) + b_g(y - b_g) + c_g(z - c_g) + \frac{1}{2} \frac{d_g}{d_g} r_g^2$$

hat. Die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w in einem beliebigen Punkte im Innern der Kugel finden wir durch Ableitung nach x, y, z , nämlich

$$\begin{aligned} u &= a_g + \frac{d_g}{d_y} (x - a_g) \\ (d) \quad v &= b_g + \frac{d_g}{d_x} (y - b_g) \\ w &= c_g + \frac{d_g}{d_z} (z - c_g). \end{aligned}$$

Wenn Q_g die Dichte der Kugel ist, so wird die kinetische Energie durch Berechnung des Integrals

$$(e) \quad T_g^0 = \frac{1}{2} Q_g \int (u^2 + v^2 + w^2) d\tau$$

gefunden, wo $d\tau$ das Volumelement ist, und die Integration über das ganze Innere der Kugel auszudehnen ist.

Wenn man nach (d) die Quadrate von u, v, w bildet und summiert, so findet man T_g^0 als die Summe von drei Integralen. Eins derselben muß verschwinden, da es das Integral eines in $x - a_g, y - b_g, z - c_g$ linearen Ausdruckes, also einer räumlichen Kugelfunktion erster Ordnung ist [82(C)]. Die Ausführung der beiden anderen Integrale bietet keine Schwierigkeiten, und man findet

$$(f) \quad T_g^0 = \frac{1}{2} Q_g \cdot \frac{4}{3} \pi d_g^3 \left\{ a_g^2 + b_g^2 + c_g^2 + \frac{3}{5} d_g^2 \right\},$$

oder, wenn wir die Masse M_g der Kugel einführen,

$$(f') \quad T_g^0 = \frac{1}{2} M_g \left\{ a_g^2 + b_g^2 + c_g^2 + \frac{3}{5} d_g^2 \right\}.$$

191. Transformation des Integrals für die Energie der Flüssigkeit. — Wenn φ das Geschwindigkeitspotential und q die Dichte der Flüssigkeit ist, so ist die kinetische Energie der Flüssigkeit durch das Integral

$$(a) \quad T = \frac{1}{2} q \int \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau$$

gegeben, wo die Integration über alle Volumelemente $d\tau$ der Flüssigkeit auszudehnen ist.

Eine Transformation nach dem GREEN'schen Satze wird T die Form eines Oberflächenintegrals geben. Setzen wir nämlich in der

Formel 82(a) $\psi = \varphi$, und erinnern uns, daß überall in der Flüssigkeit $\nabla^2 \varphi = 0$ ist, so erhalten wir

$$(b) \quad \int \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau = \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma,$$

wo die kubische Integration über einen beliebig begrenzten Teil der Flüssigkeit und die Flächenintegration über die Grenzfläche σ dieses Volumens auszudehnen ist. n ist die nach außen gerichtete Normale dieser Grenzfläche.

Die Grenzfläche σ können wir jetzt in der folgenden Weise wählen: sie kann aus den Oberflächen sämtlicher Kugeln unseres Systems und einer Kugel mit sehr großem Radius bestehen, welche das ganze System umschließt. Läßt man aber den Radius R der letzten Kugel unbegrenzt anwachsen, während ihr Mittelpunkt beispielsweise im Schwerpunkte des Kugelsystems liegen bleibt, so wird der Wert des Flächenintegrals über diese Kugelfläche sich auf Null reducieren. Denn auf dieser Kugelfläche wird der Wert des Potentials φ wie eine Größe der Ordnung $\frac{1}{R}$, die Geschwindigkeit $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$

wie eine Größe der Ordnung $\frac{1}{R^2}$ abnehmen, während die Oberfläche, über welche das Integral zu berechnen ist, nur proportional der Größe R^2 zunimmt, so daß das Flächenintegral als eine kleine Größe der Ordnung $\frac{1}{R}$ verschwindet.

Die Energie der ganzen Flüssigkeit wird deshalb als ein Flächenintegral gefunden, welches über die Oberflächen der n Kugeln g auszudehnen ist. Das Integral zerlegt sich also in eine Summe von n einfachen Integralen,

$$(c) \quad T = \sum_1^n T_g,$$

deren jedes Glied T_g das über die Oberfläche einer bestimmten Kugel g ausgedehnte Integral darstellt. Bemerken wir jetzt weiter, daß n die von der Flüssigkeit in die Kugel hinein gerichtete Normale bedeutet, so kann an der Oberfläche der Kugel g die Normale n durch den negativen Radius r_g ersetzt werden. T_g läßt sich also in der Form

$$(d) \quad T_g = -\frac{1}{2} q \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r_g} d\sigma_g$$

schreiben, wo $d\sigma_g$ ein Element der Oberfläche der Kugel g bedeutet.

192. Berechnung des Energieintegrals an der Oberfläche einer Kugel. — Zur Berechnung des Energiegliedes T_g genügt also die Kenntnis des Geschwindigkeitspotentials φ und der normalen Geschwindigkeitskomponente $\frac{\partial \varphi}{\partial r_g}$ an der Oberfläche der Kugel g . Die letztere Größe ist mit der zur Grenzfläche normalen Komponente der Geschwindigkeit eines Punktes der Kugel identisch. Also

$$(a) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r_g} \right)_{r_g = a_g} = \dot{a}_g + a_g \frac{x' - a_g}{a_g} + b_g \frac{y' - b_g}{a_g} + c_g \frac{z' - c_g}{a_g},$$

wo, wie früher, x', y', z' die laufenden Koordinaten an der Oberfläche der Kugel sind.

Den Wert des Potentials φ in der Umgebung einer beliebigen Kugel g des Kugelsystems haben wir in der Form 77 (b) dargestellt. Da nur die Werte an der Oberfläche der Kugel in Frage kommen, können wir sofort die Substitution $r_g = a_g$, $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ ausführen, wonach 77 (b) die Form

$$(b) \quad \begin{aligned} \varphi' = & - \left[\dot{a}_g \dot{a}_g - (\varphi_\gamma)_g \right] \\ & - \left\{ \left[\frac{1}{2} \dot{a}_g - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x} \right)_g \right] (x' - a_g) + \left[\frac{1}{2} \dot{b}_g - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial y} \right)_g \right] (y' - b_g) + \left[\frac{1}{2} \dot{c}_g - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial z} \right)_g \right] (z' - c_g) \right\} \\ & + \dots \end{aligned}$$

annimmt. Die durch Punkte angedeuteten Glieder sind homogen zweiten oder höheren Grades in $x' - a_g$, $y' - b_g$, $z' - c_g$. Das in dieser Reihe auftretende φ_γ hat den Wert 76 (d) oder

$$(b') \quad \varphi_\gamma = \sum_{k \geq g}^k \varphi_k + \sum_{i \geq k \geq g}^i \sum_k^k \varphi_{ik} + \dots$$

Die erste Zeile der Formel (b) ist eine Kugelflächenfunktion von der Ordnung Null, die zweite eine von der Ordnung 1, und die folgenden Zeilen werden Kugelflächenfunktionen immer höherer Ordnungen darstellen. Jetzt soll aber mit (a) multipliziert werden, welches die Summe einer Kugelflächenfunktion von der Ordnung Null und einer von der Ordnung 1 ist. Im Integral werden deshalb die in φ' enthaltenen Glieder höherer Ordnungen bedeutungslos werden. Wenn wir die Produkte der Kugelflächenfunktionen gleicher Ordnung der Ausdrücke (a) und (b) bilden, und zur Berechnung der Integrale die Formeln 83 (c) und (e) benutzen, so ergibt sich für T_g

$$T_g = 2\pi q \dot{a}_g^2 \dot{b}_g [d_g \dot{d}_g - (\varphi_\gamma)_g] \\ + \frac{1}{2} q E_g \left\{ a_g \left[\frac{1}{2} \dot{a}_g - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x} \right)_g \right] + b_g \left[\frac{1}{2} \dot{b}_g - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial y} \right)_g \right] + c_g \left[\frac{1}{2} \dot{c}_g - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial z} \right)_g \right] \right\},$$

oder durch veränderte Ordnung der Glieder und Einführung des Volumens E_g und der Volumänderungsgeschwindigkeit \dot{E}_g der Kugel (19):

$$(c) \quad T_g = \frac{1}{4} q E_g \{ \dot{a}_g^2 + \dot{b}_g^2 + \dot{c}_g^2 + 6 \dot{d}_g^2 \} \\ - \frac{1}{2} q \dot{E}_g (\varphi_\gamma)_g - \frac{3}{4} q E_g \left\{ \dot{a}_g \left(\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x} \right)_g + \dot{b}_g \left(\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial y} \right)_g + \dot{c}_g \left(\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial z} \right)_g \right\}.$$

Durch Summation nach g findet man dann die Gesamtenergie T der Flüssigkeit, und zwar wird die Genauigkeit, womit man den Wert dieser Energie findet, ausschließlich von derjenigen Genauigkeit abhängen, mit der man im Ausdrucke von T_g den Wert von φ_γ berücksichtigt.

193. Die Energie der Flüssigkeit in erster und zweiter Annäherung. — In der ersten Annäherung setzen wir das φ_γ vollständig außer Betracht (78), das heißt, wir sehen die Geschwindigkeit, welche die entfernten Kugeln an der Oberfläche der Kugel g erzeugen, als verschwindend klein an im Vergleich zu der Geschwindigkeit, welche die Kugel g selbst erzeugt. T_g reducirt sich dann einfach auf die erste Zeile rechts der Formel 192(c). Führen wir hier gleichzeitig die verdrängte Flüssigkeitsmasse $m = q E$ ein, und summieren über sämtliche Kugeln, so finden wir:

$$(a) \quad T = \frac{1}{4} \sum_g m_g \{ \dot{a}_g^2 + \dot{b}_g^2 + \dot{c}_g^2 + 6 \dot{d}_g^2 \}.$$

In dieser Annäherung ist die Energie der Flüssigkeit von den Koordinaten der einzelnen Kugeln unabhängig. Sie tritt einfach als die Summe von n Gliedern auf, deren jedes die Energie darstellt, welche eine einzige Kugel, wenn sie allein vorhanden wäre, in der Flüssigkeit durch ihre Bewegung erzeugen würde. Betrachtet man deshalb die Bewegung des Kugelsystems in dieser Annäherung, so fällt jede Wechselwirkung unter den Kugeln fort.

In der zweiten Annäherung haben wir das erste Glied von φ_γ in Betracht zu ziehen:

$$\varphi_\gamma = \sum_{k \geq g} \varphi_k.$$

Bei diesem Genauigkeitsgrade können wir die Substitution $x = a_g$,

$y = b_g$, $z = c_g$ in φ_k vor der Differentiation ausführen (78), und den Ausdruck der Energie der Flüssigkeit in der Form

$$(b) \quad T = \frac{1}{4} \sum_k \left\{ m_g (\dot{a}_g^2 + \dot{b}_g^2 + \dot{c}_g^2 + 6 \dot{d}_g^2) \right\} \\ - \frac{1}{2} q \sum_g \sum_k \left\{ E_g (f_k)_g + \frac{3}{2} E_g \left[\dot{c}_g \frac{\partial \varphi_k}{\partial c_g} + \dot{b}_g \frac{\partial \varphi_k}{\partial b_g} + \dot{c}_g \frac{\partial \varphi_k}{\partial c_g} \right] \right\}$$

schreiben.

Diese zweite Annäherung, bei der wir alle in φ_g auftretenden Reaktionspotentiale vernachlässigen, giebt eben die Genauigkeit, die wir bis jetzt durchgehend bei der Diskussion der hydrodynamischen Fernkräfte verwendet haben. Wir können deshalb bei diesem Annäherungsgrade nach 166 (a) die Produkte $\frac{3}{2} E_g \dot{a}_g$, $\frac{3}{2} E_g \dot{b}_g$, $\frac{3}{2} E_g \dot{c}_g$ mit den Komponenten \dot{H}_g , \dot{G}_g , \dot{H}_g des Aktionsmomentes identifizieren. Die zweite Zeile von (b) enthält dann das Resultat, welches man durch Anwendung der Operation χ_g auf die Funktion $(\varphi_k)_g$ erhält. Drückt man nach (167) $(\varphi_k)_g$ durch die Operation χ_k aus, so wird

$$T = \frac{1}{4} q \sum_g \left\{ E_g (\dot{a}_g^2 + \dot{b}_g^2 + \dot{c}_g^2 + 6 \dot{d}_g^2) \right\} + \frac{1}{2} q \sum_g \sum_k \chi_g \chi_k \frac{1}{4\pi r_{kg}},$$

oder

$$(b) \quad T = \frac{1}{4} \sum_g \left\{ m_g (\dot{a}_g^2 + \dot{b}_g^2 + \dot{c}_g^2 + 6 \dot{d}_g^2) \right\} + \Psi,$$

wo Ψ die früher gefundene Funktion 176 (d) ist.

In dieser Funktion treten die Koordinaten der einzelnen Kugeln auf, und die Energie ist in dieser Annäherung nicht nur von den Bewegungen, sondern auch von der gegenseitigen Lage der Kugeln abhängig. Das neu hinzugekommene Glied Ψ können wir deshalb als einen Ausdruck der gegenseitigen kinetischen Energie der in der Flüssigkeit bewegten Kugeln bezeichnen.

194. Die Bewegungsgleichungen einer Kugel. — Die Gesamtenergie des bewegten Systems erhalten wir, wenn wir zu der eben gefundenen Energie T der Flüssigkeit die Energie T^0 der Kugeln fügen. Es ergibt sich dann

$$(a) \quad \mathfrak{T} = \frac{1}{2} \sum_g M_g \left\{ \dot{a}^2 + \dot{b}^2 + \dot{c}^2 + \frac{3}{6} \dot{d}^2 \right\} \\ + \frac{1}{4} \sum_g m_g \left\{ \dot{a}^2 + \dot{b}^2 + \dot{c}^2 + 6 \dot{d}^2 \right\} + \Psi.$$

Bedeutен jetzt $\mathfrak{X}_g, \mathfrak{Y}_g, \mathfrak{Z}_g$ die Komponenten der fremden Kraft, welche im Mittelpunkt einer bestimmten Kugel g des Kugelsystems angreift, so kann man nach LAGRANGE für die Bewegung des Mittelpunktes a_g, b_g, c_g dieser Kugel die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{a}_g} - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial a_g} &= \mathfrak{X}_g \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{b}_g} - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial b_g} &= \mathfrak{Y}_g \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{c}_g} - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial c_g} &= \mathfrak{Z}_g \end{aligned}$$

aufstellen.

Zerlegen wir \mathfrak{T} in seine zwei Teile T^0 und T und ziehen diejenigen Glieder, welche T enthalten, auf die rechte Seite hinüber, während wir auf der linken Seite die Differentiationen des T^0 ausführen, so nehmen diese Gleichungen folgende Form an:

$$\begin{aligned} M_g \ddot{a}_g &= - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{a}_g} + \frac{\partial T}{\partial a_g} + \mathfrak{X}_g \\ M_g \ddot{b}_g &= - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{b}_g} + \frac{\partial T}{\partial b_g} + \mathfrak{Y}_g \\ M_g \ddot{c}_g &= - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{c}_g} + \frac{\partial T}{\partial c_g} + \mathfrak{Z}_g. \end{aligned}$$

Führen wir weiter auf der rechten Seite die Differentiationen aus, und bemerken, daß a_g, b_g, c_g nur in Ψ vorkommen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} M_g \ddot{a}_g &= - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (m_g \dot{a}_g) - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{a}_g} + \frac{\partial \Psi}{\partial a_g} + \mathfrak{X}_g \\ M_g \ddot{b}_g &= - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (m_g \dot{b}_g) - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{b}_g} + \frac{\partial \Psi}{\partial b_g} + \mathfrak{Y}_g \\ M_g \ddot{c}_g &= - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (m_g \dot{c}_g) - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{c}_g} + \frac{\partial \Psi}{\partial c_g} + \mathfrak{Z}_g. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen haben genau die Form der Bewegungsgleichungen einer Kugel g mit der Masse M_g im leeren Raum, wenn dieselbe von einer fremden Kraft $(\mathfrak{X}_g, \mathfrak{Y}_g, \mathfrak{Z}_g)$ und außerdem von drei Kräften angegriffen wird, die den Einfluß der Flüssigkeit auf die Bewegung der Kugel darstellen. In der ersten Kolonne rechts stehen

nämlich die Komponenten der lokalen Kraft **163** (a), in der zweiten Kolonne die Komponenten der inducierenden Fernkraft **177** (c), und in der dritten Kolonne die Komponenten der energetischen Fernkraft **176** (c).

Unsere früheren Resultate sind somit verificiert, und gleichzeitig haben wir eine neue Definition der Funktion Ψ gefunden, aus welcher man die hydrodynamischen Fernkräfte ableiten kann: sie stellt die gegenseitige kinetische Energie der in der Flüssigkeit bewegten Kugeln dar. Für einen Beobachter, welcher die Flüssigkeit und die kleinen Bewegungen der Kugeln nicht sieht, und welcher folglich nur die Energiekraft, nicht die Induktionskraft kennt, wird die kinetische Natur dieser Energie nicht erkennbar sein; er wird — Ψ als die gegenseitige potentielle Energie der Kugeln auffassen.

Die hier verwendete Methode ist besonders zu empfehlen, wenn man mehr in den Einzelheiten einen Vergleich mit den Ergebnissen der HERTZ'schen Mechanik durchführen will.

Achter Abschnitt.

Die permanenten Energiekräfte zwischen pulsierenden und oscillierenden Kugeln.

195. Kräftefunktion der permanenten Energiekraft für zwei Kugeln. — Aus den vorhergehenden Untersuchungen ist als allgemeines Resultat hervorgegangen, daß diejenigen hydrodynamischen Fernkräfte niederer Ordnung, welche sichtbare Bewegungen der Kugeln erzeugen, nach den allgemeinen Gesetzen der GALILEI-NEWTON'schen Mechanik wirken. Wir werden jetzt die Wirkungen dieser Kräfte in den Einzelheiten untersuchen. Wir sehen dabei ganz von der inducierenden Fernkraft ab, und betrachten nur die energetischen Kräfte niederer Ordnung oder die permanenten Energiekräfte. Weiter beschränken wir uns auf die Betrachtung der Wechselwirkung von nur zwei Kugeln k und g .

Als Grundlage unserer Untersuchungen können wir dann die Kräftefunktion

$$(a) \quad \Psi_{kg} = q \chi_g \chi_k \frac{1}{4\pi r_{kg}}$$

nehmen, oder in vollständig entwickelter Form:

$$\begin{aligned}
 \Psi_{kg} = & q \frac{\dot{E}_g \dot{E}_k}{4\pi r_{kg}} \\
 & + q \left\{ \dot{E}_g \dot{E}_k \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{E}_g \dot{G}_k \frac{\partial}{\partial b_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{E}_g \dot{H}_k \frac{\partial}{\partial c_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right\} \\
 & + q \left\{ \dot{E}_k \dot{E}_g \frac{\partial}{\partial a_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{E}_k \dot{G}_g \frac{\partial}{\partial b_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{E}_k \dot{H}_g \frac{\partial}{\partial c_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right\} \\
 & + q \left\{ \dot{E}_k \dot{E}_g \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{E}_k \dot{G}_g \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial b_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{E}_k \dot{H}_g \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial c_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right. \\
 & + \dot{G}_k \dot{E}_g \frac{\partial^2}{\partial b_k \partial a_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{G}_k \dot{G}_g \frac{\partial^2}{\partial b_k \partial b_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{G}_k \dot{H}_g \frac{\partial^2}{\partial b_k \partial c_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \\
 & \left. + \dot{H}_k \dot{E}_g \frac{\partial^2}{\partial c_k \partial a_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{H}_k \dot{G}_g \frac{\partial^2}{\partial c_k \partial b_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{H}_k \dot{H}_g \frac{\partial^2}{\partial c_k \partial c_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{b}$$

Wir werden jetzt die einzelnen Glieder dieser Kräftefunktion nacheinander untersuchen.

196. Die Wechselwirkung zwischen pulsierenden Kugeln. —

Denken wir uns erst den Fall, daß die Kugeln keine permanenten Aktionsmomente haben, so daß $\dot{E}_g = \dot{G}_g = \dot{H}_g = \dot{E}_k = \dot{G}_k = \dot{H}_k = 0$. Die Kräftefunktion reduciert sich dann auf:

$$\Psi_{kg} = q \chi_k^0 \chi_g^0 \frac{1}{4\pi r_{kg}},
 \tag{a}$$

oder

$$\Psi_{kg} = q \frac{\dot{E}_k \dot{E}_g}{4\pi r_{kg}}.
 \tag{b}$$

Die Lage der Kugeln relativ zu einander ist vollständig durch den Abstand r_{kg} gegeben. Es wird also eine Kraft auftreten, welche diesen Abstand zu verändern sucht, und welche den Wert

$$\frac{\partial \Psi_{kg}}{\partial r_{kg}} = -q \frac{\dot{E}_k \dot{E}_g}{4\pi r_{kg}^2}
 \tag{c}$$

hat.

Diese Kraft ist negativ oder anziehend, wenn die Volumänderungsgeschwindigkeiten \dot{E}_k und \dot{E}_g beider Kugeln das gleiche Vorzeichen haben, beispielsweise, wenn sich beide Kugeln gleichzeitig ausdehnen (Figur 36a), oder wenn sich beide gleichzeitig zusammenziehen. Da-

gegen ist die Kraft positiv oder abstossend, wenn sich die eine Kugel ausdehnt, während sich die andere zusammenzieht (Figur 36b). Die Kraft nimmt umgekehrt wie das Quadrat des Abstandes ab.

Die Erscheinung wird, wenn man die Flüssigkeit oder die kleinen Bewegungen nicht sieht, vollständig wie eine Fernwirkungserscheinung aussehen. Vergleicht man aber mit den in 129 dargestellten Resultaten, so ist die Ursache der Erscheinung vollständig klar: jede Kugel befindet sich in dem von den anderen herrührenden Strom, und bewegt sich während der Expansion gegen, während der Kontraktion mit diesem Strome (Figur 32a und b).

Sind die Volumänderungen periodisch, so wird die Kraft wechselndes Vorzeichen und den Mittelwert Null haben, solange die Perioden verschieden sind. Nähern sich die Pulsationen dem Isochronismus, so treten langsame Schwankungen des Mittelwertes der Kraft ein (Figur 30). Die Kugeln werden sich periodisch mit langer Periode gegeneinander nähern und voneinander entfernen, aber im Mittel immer noch ihre Lage behalten.



Fig. 36. Wechselwirkungen zwischen pulsierenden Kugeln.

Tritt Isochronismus ein, so hat die Kraft einen an Vorzeichen unveränderlichen Mittelwert, und das Vorzeichen hängt von der Phase ab. Bei gleicher Phase tritt die maximale Anziehung, bei entgegengesetzter Phase die maximale Abstossung ein (Figur 31a und c), und zwischen diesen Grenzfällen ist ein kontinuierlicher Übergang, so daß die Kraft Null wird bei einem Gangunterschied von einer viertel Phase. Die Wechselwirkungen zwischen pulsierenden Kugeln aller Phasen kann man sich veranschaulichen, wenn man sich eine Anzahl von pulsierenden Kugeln auf einen Kreis in solcher Weise verteilt vorstellt, daß die Winkel zwischen den Radien, welche vom Mittelpunkte des Kreises zu den einzelnen Kugeln führen, den Phasenunterschied unter den Pulsationen der betreffenden Kugeln darstellt. In diesem Kreise werden die nebeneinander befindlichen Kugeln einander anziehen, die diametral gegenüberliegenden Kugeln einander abstossen, und die 90° voneinander liegenden Kugeln sich zu einander neutral verhalten.

Denken wir uns schliesslich, daß keine andere Phase als die gleiche oder die entgegengesetzte vorkommt, so liegt der Fall des Synchronismus vor. Die Formeln (b) und (c) können dann mit gleichem Recht zur Darstellung der augenblicklich vorhandenen oder der mittleren Kraft dienen. In letzterem Falle sind \dot{E}_k und \dot{E}_g als quadratische Mittelwerte aufzufassen, die mit Vorzeichen versehen sind. Erinnern wir uns daran, daß die Pulsationsintensitäten \dot{E}_k und \dot{E}_g gleiches Vorzeichen bei gleicher, und entgegengesetztes Vorzeichen bei entgegengesetzter Phase haben, so finden wir das Gesetz:

Gleich pulsierende Kugeln ziehen einander an, entgegengesetzt pulsierende stoßen einander ab mit einer Kraft, welche der Dichte der Flüssigkeit und dem Produkt der Pulsationsintensitäten direkt und dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional ist.

Betrachtet man die Stromfelder, so hat man also Anziehung bei einem Felde wie Figur 2, Abstossung bei einem wie Figur 3.

Es hat auch noch Interesse, zu bemerken, daß man in den Formeln (b) und (c) die Pulsationsintensitäten \dot{E}_g und \dot{E}_k durch die Pulsationsmomente \bar{E}_g und \bar{E}_k [104 (B)] ersetzen kann. Als Faktor wird dann anstatt der Dichte q die reciproke Dichte oder das spezifische Volumen der Flüssigkeit auftreten. Ein besonderes Interesse hat aber die unsymmetrische Form:

$$(d) \quad \Psi_{kg} = \frac{\dot{E}_g \bar{E}_k}{4\pi r_{kg}} = \frac{\bar{E}_g \dot{E}_k}{4\pi r_{kg}},$$

wo der von der Flüssigkeit herrührende Faktor nicht mehr explicite auftritt, und wo das Produkt der Pulsationsintensität der einen Kugel in das Pulsationsmoment der anderen das Maß für die GröÙe der Kraft abgiebt.

197. Die Kräftefunktion für die Wechselwirkung zwischen einer pulsierenden und einer oscillierenden Kugel. — Wir gehen jetzt zu dem nächsten Fall über, wo die eine Kugel g nur pulsierend, die zweite k nur oscillierend ist. Setzt man in 195 (b) $\dot{E}_g = \dot{G}_g = \dot{H}_g = \dot{E}_k = 0$, so reduciert sich die Kräftefunktion auf:

$$(a) \quad \Psi_{kg} = q \left\{ \dot{E}_g \dot{E}_k \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{E}_g \dot{G}_k \frac{\partial}{\partial b_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{E}_g \dot{H}_k \frac{\partial}{\partial c_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right\}.$$

Benutzt man die Operationszeichen χ_g^0 und χ_k^1 (167), so läßt sich abgekürzt

$$(b) \quad \Psi_{kg} = q \chi_g^0 \chi_k^1 \frac{1}{4\pi r_{kg}}$$

schreiben. Bezeichnet man andererseits durch \dot{S}_k den Vektor, welcher die Komponenten \dot{E}_k , \dot{G}_k , \dot{H}_k hat, und benutzt die in 27 definierte Differentiation längs einer Achse, so kann man Ψ_{kg} auch in der Form

$$(c) \quad \Psi_{kg} = q \dot{E}_g \dot{S}_k \frac{\partial}{\partial s_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}}$$

darstellen.

Wenn wir in (a) die Differentiation ausführen, so wird:

$$(d) \quad \Psi_{kg} = q \dot{E}_g \frac{\dot{E}_k(a_g - a_k) + \dot{G}_k(b_g - b_k) + \dot{H}_k(c_g - c_k)}{4\pi r_{kg}^3}.$$

Führen wir schliesslich Polarkoordinaten ein, und bezeichnen mit θ den Winkel, den das Aktionsmoment \dot{S}_k mit dem von k nach g gerichteten Radiusvektor r_{kg} bildet, so wird

$$(e) \quad \Psi_{kg} = q \frac{\dot{E}_g \dot{S}_k}{4\pi r_{kg}^2} \cos \theta.$$

Wenn die Pulsationen und Oscillationen erst mit verschiedenen Perioden verlaufen, und dann erst Isochronismus und nachher Synchronismus eintritt, so wird der Mittelwert der Kraft, als Funktion der Zeit betrachtet, genau wie im Fall der pulsierenden Kugeln erst einen langsam schwankenden Wert, und dann einen mit unveränderlichem, vom Phasenunterschied abhängigem Vorzeichen annehmen. Wir brauchen deshalb die sich daran knüpfenden Überlegungen nicht jedesmal zu wiederholen, sondern können schon von Anfang an den einfachen Fall des Synchronismus voraussetzen und \dot{E}_g und \dot{S}_k als quadratische Mittelwerte interpretieren.

Es verdienen auch in diesem Falle, wie bei dem der pulsierenden Kugeln, die unsymmetrischen Formen

$$(f) \quad \Psi_{kg} = \frac{\bar{E}_g \bar{S}_k}{4\pi r_{kg}^2} \cos \theta = \frac{\bar{E}_g \bar{S}_k}{4\pi r_{kg}^2} \cos \theta$$

erwähnt zu werden. Der Faktor q , der der Repräsentant für das Eingreifen der Flüssigkeit in die Erscheinung ist, ist hier verschwunden, während gleichzeitig ein Faktor, welcher den Bewegungszustand der Kugel in rein kinematischer Weise beschreibt, durch einen durch

die dynamische Wechselwirkung der Kugel und der Flüssigkeit definierten Parameter ersetzt ist.

198. Die Kraftwirkungen zwischen einer pulsierenden und einer oscillierenden Kugel. — Um die Kräfte zwischen einer pulsierenden und einer oscillierenden Kugel zu beschreiben, gehen wir am zweckmäßigsten von der in Polarkoordinaten ausgedrückten Kräftefunktion **197** (e) aus. Dieselbe enthält nur solche geometrischen Parameter, die für die gegenseitige Lage der Kugeln zu einander charakteristisch sind, die Lage der einen Kugel relativ zu der Oscillationsrichtung der anderen mitgerechnet. Diese Parameter sind der Abstand r_{kg} und der Winkel θ . Durch Ableitung nach diesen Parametern finden wir die Kräfte oder Drehungsmomente, welche diese Parameter zu verändern suchen, ganz davon abgesehen, ob absolut genommen die Lageänderungen an der einen oder an der anderen Kugel stattfinden.

Durch Ableitung nach r_{kg} ergibt sich also die gegenseitige rein anziehende oder rein abstossende Kraft:

$$(a) \quad \frac{\partial \Psi_{kg}}{\partial r_{kg}} = -2q \frac{\dot{E}_g \dot{S}_k}{4\pi r_{kg}^3} \cos \theta.$$

Dieselbe nimmt im umgekehrten Verhältnis des Kubus des Abstandes ab, und hängt sonst an GröÙe und Vorzeichen von dem Winkel θ ab, welcher zwischen der Oscillationsachse der einen Kugel und der Richtungslinie zu der anderen eingeschlossen ist.

Ist dieser Winkel gleich Null, und sind Aktionsmoment und Pulsationsintensität beide positiv, so hat die Kraft ihren größten negativen oder anziehenden Wert (Figur 37 a); ist der Winkel gleich π , so hat die Kraft ihren größten positiven oder abstossenden Wert (Figur 37 b). Wenn sich also die pulsierende Kugel ausdehnt, während sich die oscillierende nähert, und sich zusammenzieht, während sich die oscillierende entfernt, so tritt Anziehung ein. Wenn sich dagegen die pulsierende Kugel ausdehnt, während sich die oscillierende entfernt, und sich zusammenzieht, während die oscillierende sich nähert, so erfolgt Abstossung. In den zwischenliegenden Lagen ist kontinuierlicher Übergang, und zwar kommt keine anziehende oder abstossende Komponente vor, wenn der Winkel gleich $\frac{\pi}{2}$ ist, so daß die Oscillationsachse senkrecht zur Verbindungslinie der Kugeln steht (Figur 37 c).

Durch Ableitung der Kräftefunktion nach θ findet man das Drehungsmoment, welches den Winkel θ zu verändern sucht:

$$(b) \quad \frac{\partial \Phi_{kg}}{\partial \theta} = -q \frac{E_g \dot{S}_k}{4\pi r_{kg}^2} \sin \theta.$$

Dieser Winkel kann sich in zweifacher Weise verändern: die oscillierende Kugel k kann festgehalten werden, und zwar mit unveränderlicher Oscillationsrichtung, während die pulsierende Kugel g sich kreisförmig um k bewegt. Andererseits kann die pulsierende Kugel g festgehalten werden, während sich die Richtung der Oscillationsachse der oscillierenden Kugel k verändert, sei es, daß damit eine wirkliche Drehung der Kugel selbst folgt oder nicht (139). In allen Fällen wird das Drehungsmoment, welches den Winkel θ zu

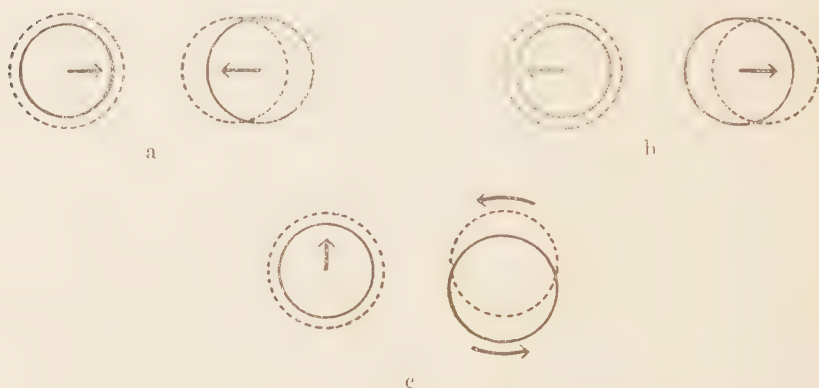


Fig. 37, a, b und c. Wechselwirkungen zwischen einer pulsierenden und einer oscillierenden Kugel.

verändern sucht, denselben Wert (b) haben, und den immer kleiner als π gerechneten Winkel zu verkleinern suchen. Die Intensität des Drehungsmomentes nimmt umgekehrt wie das Quadrat des Abstandes ab. Durch Division mit dem Abstände r_{kg} findet man die entsprechende lineare Kraftkomponente, die die Verschiebung der pulsierenden Kugel senkrecht zu der Verbindungslinie r_{kg} erzeugt. Diese Kraftkomponente nimmt also, genau wie die radiale, umgekehrt wie der reciproke Kubus des Abstandes ab. Das Drehungsmoment ist Null, wenn der Winkel θ gleich Null oder π ist (Figur 37 a und b). Dabei ist die erste Lage der Drehung gegenüber eine stabile, die zweite eine labile Gleichgewichtslage. Das Drehungsmoment hat seinen maximalen Wert, wenn $\theta = \frac{\pi}{2}$ (Figur 37 c), und sucht, je

nach den Umständen, durch Verschiebung der pulsierenden oder durch Drehung der oscillierenden Kugel den Fall des stabilen Gleichgewichtes (Figur 37 a) herzustellen. Man sieht, daß die stabile Lage diejenige der größten Anziehung, und die instabile diejenige der größten Abstossung ist.

Diese Anziehungen, Abstossungen und Drehungen werden alle wie Fernwirkungen aussehen. Man überzeugt sich aber in allen Fällen leicht, daß alles nach den früher gefundenen Regeln für die Bewegung einer Kugel durch einen Flüssigkeitsstrom verläuft: die pulsierende Kugel befindet sich in dem von der oscillierenden Kugel herrührenden Einfallströme (Figur 7) und sucht sich während der Expansion immer gegen, und während der Kontraktion immer mit dem Strome zu bewegen; die oscillierende Kugel befindet sich in dem von der pulsierenden herrührenden Einfallströme (Figur 1), und sucht sich so zu verschieben oder zu drehen, daß die Oscillationen des Stromes eine möglichst grofse Komponente gegen die Oscillationen der Kugel erhalten.

199. Kräftefunktion für die Wechselwirkung zweier oscillierenden Kugeln. — Wenn wir schliesslich in 195 (b) die Volumina beider Kugeln konstant annehmen, also $\dot{E}_g = \dot{E}_k = 0$ einführen, so ergibt sich als Kräftefunktion für die Wechselwirkung zweier oscillierenden Kugeln:

$$(a) \quad \begin{aligned} \psi_{kg} = q \left\{ \dot{E}_k \dot{E}_g \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{E}_k \dot{G}_g \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial b_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{E}_k \dot{H}_g \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial c_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right. \\ + \dot{G}_k \dot{E}_g \frac{\partial^2}{\partial b_k \partial a_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{G}_k \dot{G}_g \frac{\partial^2}{\partial b_k \partial b_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{G}_k \dot{H}_g \frac{\partial^2}{\partial b_k \partial c_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \\ \left. + \dot{H}_k \dot{E}_g \frac{\partial^2}{\partial c_k \partial a_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{H}_k \dot{G}_g \frac{\partial^2}{\partial c_k \partial b_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{H}_k \dot{H}_g \frac{\partial^2}{\partial c_k \partial c_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right\}. \end{aligned}$$

Mit Anwendung der Operationssymbole χ_k^1 und χ_g^1 läßt sich dieses abgekürzt in der Form

$$(b) \quad \psi_{kg} = q \chi_g^1 \chi_k^1 \frac{1}{4\pi r_{kg}}$$

schreiben. Benutzt man die Differentiation längs der Achsen s_k und s_g , so ergibt sich ein anderer abgekürzter Ausdruck:

$$(c) \quad \psi_{kg} = q \dot{S}_k \dot{S}_g \frac{\partial^2}{\partial s_k \partial s_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}}.$$

Die unsymmetrischen Formen der Kräftefunktion

$$(d) \quad \Psi_{kg} = \bar{S}_k \dot{S}_g \frac{\partial^2}{\partial s_k \partial s_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} = \dot{S}_k \bar{S}_g \frac{\partial^2}{\partial s_k \partial s_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}},$$

wo die eine Kugel mit ihrem kinematischen, die andere mit ihrem dynamischen Aktionsmomente auftritt, verdienen auch Beachtung.

Der Ausdruck (a) läßt sich auch

$$(d') \quad \begin{aligned} \Psi_{kg} = & q \dot{F}_g \frac{\partial}{\partial a_g} \left[\dot{F}_k \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{G}_k \frac{\partial}{\partial b_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{H}_k \frac{\partial}{\partial c_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right] \\ & + q \dot{G}_g \frac{\partial}{\partial b_g} \left[\dot{F}_k \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{G}_k \frac{\partial}{\partial b_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{H}_k \frac{\partial}{\partial c_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right] \\ & + q \dot{H}_g \frac{\partial}{\partial c_g} \left[\dot{F}_k \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{G}_k \frac{\partial}{\partial b_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{H}_k \frac{\partial}{\partial c_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right] \end{aligned}$$

schreiben. Durch Ausführung der Differentiation nach a_k, b_k, c_k wird:

$$\begin{aligned} \Psi_{kg} = & q \dot{F}_g \frac{\partial}{\partial a_g} \frac{\dot{F}_k(a_g - a_k) + \dot{G}_k(b_g - b_k) + \dot{H}_k(c_g - c_k)}{4\pi r_{kg}^3} \\ & + q \dot{G}_g \frac{\partial}{\partial b_g} \frac{\dot{F}_k(a_g - a_k) + \dot{G}_k(b_g - b_k) + \dot{H}_k(c_g - c_k)}{4\pi r_{kg}^3} \\ & + q \dot{H}_g \frac{\partial}{\partial c_g} \frac{\dot{F}_k(a_g - a_k) + \dot{G}_k(b_g - b_k) + \dot{H}_k(c_g - c_k)}{4\pi r_{kg}^3}, \end{aligned}$$

und durch Ausführung der Differentiation nach a_g, b_g, c_g

$$\begin{aligned} \Psi_{kg} = & q \dot{F}_g \frac{\dot{F}_k}{4\pi r_{kg}^3} - 3q \dot{F}_g \frac{\dot{F}_k(a_g - a_k) + \dot{G}_k(b_g - b_k) + \dot{H}_k(c_g - c_k)}{4\pi r_{kg}^4} \frac{a_g - a_k}{r_{kg}} \\ & + q \dot{G}_g \frac{\dot{G}_k}{4\pi r_{kg}^3} - 3q \dot{G}_g \frac{\dot{F}_k(a_g - a_k) + \dot{G}_k(b_g - b_k) + \dot{H}_k(c_g - c_k)}{4\pi r_{kg}^4} \frac{b_g - b_k}{r_{kg}} \\ & + q \dot{H}_g \frac{\dot{H}_k}{4\pi r_{kg}^3} - 3q \dot{H}_g \frac{\dot{F}_k(a_g - a_k) + \dot{G}_k(b_g - b_k) + \dot{H}_k(c_g - c_k)}{4\pi r_{kg}^4} \frac{c_g - c_k}{r_{kg}}. \end{aligned}$$

Drücken wir jetzt $\dot{F}_g, \dot{G}_g, \dot{H}_g$ und $\dot{F}_k, \dot{G}_k, \dot{H}_k$ durch \dot{S}_g und \dot{S}_k und die Kosinuse der Winkel, welche sie mit den Achsen bilden, aus und vereinfachen die auftretenden Verbindungen dieser Richtungskosinuse und derjenigen des Radiusvektors r_{kg} , so ergibt sich

$$(e) \quad \Psi_{gk} = q \dot{S}_g \dot{S}_k \frac{\cos \theta + 3 \cos \theta_g \cos \theta_k}{4\pi r_{kg}^3},$$

wo θ_k derjenige Winkel ist, welcher zwischen dem Aktionsmomente \dot{S}_k und der von k nach g gerichteten Verbindungslinie r_{kg} der Kugeln liegt, θ_g der entsprechende Winkel zwischen \dot{S}_g und der von g nach k gerichteten Verbindungslinie r_{gk} , und wo ϑ der Winkel ist, den \dot{S}_k und \dot{S}_g miteinander bilden.

Die Bögen $\pi - \theta_g$, θ_k und θ stellen die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks dar. Zwischen den Seiten $\pi - \theta_g$ und θ_k liegt der Winkel ϑ , welchen die durch die Aktionsmomente und den Radiusvektor bestimmten beiden Ebenen bilden. Wir können deshalb θ mit Hilfe der Relation

$$\cos \theta = -\cos \theta_g \cos \theta_k + \sin \theta_g \sin \theta_k \cos \vartheta$$

eliminieren, und es ergibt sich als zweckmäßigster trigonometrischer Ausdruck der Kräftefunktion

$$(f) \quad \Psi_{kg} = q \dot{S}_g \dot{S}_k \frac{\sin \theta_g \sin \theta_k \cos \vartheta + 2 \cos \theta_g \cos \theta_k}{4 \pi r_{kg}^3}.$$

Die Kräftefunktion enthält in dieser letzteren Form nur solche geometrischen Parameter, die für die gegenseitigen Lagen der beiden Kugeln und ihrer Oscillationsachsen zu einander charakteristisch sind. Diese Parameter sind der Abstand r_{kg} und die drei Winkel ϑ , θ_g , θ_k . Durch Ableitung der Kräftefunktion nach diesen Parametern findet man eine rein anziehende oder abstossende Kraft und drei Drehungsmomente, wodurch sich die Wechselwirkungen zwischen den Kugeln ausdrücken lassen.

200. Anziehung und Abstossung zwischen oscillierenden Kugeln.

— Die radial gerichtete, rein anziehende oder abstossende Kraft zwischen den Kugeln hat den Wert

$$(a) \quad \frac{\partial \Psi_{kg}}{\partial r_{kg}} = -3 q \dot{S}_g \dot{S}_k \frac{\sin \theta_g \sin \theta_k \cos \vartheta + 2 \cos \theta_g \cos \theta_k}{4 \pi r_{kg}^4}$$

und nimmt also an Intensität umgekehrt wie die vierte Potenz des Abstandes ab.

Um die Gröfse und Richtung dieser Kraft in den einfachsten Specialfällen zu untersuchen, setzen wir zunächst $\vartheta = 0$, so dafs die Oscillationsachsen der beiden Kugeln in eine Ebene fallen. Der Ausdruck (a) vereinfacht sich dann auf

$$(b) \quad \frac{\partial \Psi_{kg}}{\partial r_{kg}} = -3 q \dot{S}_g \dot{S}_k \frac{\sin \theta_g \sin \theta_k + 2 \cos \theta_g \cos \theta_k}{4 \pi r_{kg}^4}.$$

Haben jetzt die Winkel θ_g und θ_k die Werte Null oder π , so oscillieren die Kugeln längs ihrer Verbindungslinie r_{kg} , und der Wert der Kraft reducirt sich auf

$$(b') \quad \frac{\partial \Psi_{kg}}{\partial r_{kg}} = \mp 6q \frac{\dot{S}_k \dot{S}_g}{4\pi r_{kg}^4}.$$

Diese Kraft hat ihren größten negativen oder anziehenden Wert, wenn die Winkel entweder beide gleich Null oder beide gleich π sind, so daß die Kugeln gegen- und voneinander oscillieren (Figur 38 a), dagegen ihren größten positiven oder abstossenden Wert, wenn der eine Winkel gleich Null und der andere gleich π ist, so daß die Kugeln miteinander oscillieren (Figur 38 b).

Sind die beiden Winkel θ_g und θ_k gleich $\frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2}$, so oscillieren die Kugeln senkrecht zur Verbindungslinie r_{kg} . Die Kraft beträgt dann

$$(b'') \quad \frac{\partial \Psi_{kg}}{\partial r_{kg}} = \mp 3q \frac{\dot{S}_g \dot{S}_k}{4\pi r_{kg}^4}$$

und hat ihren größten negativen oder anziehenden Wert, wenn beide Winkel gleich $\frac{\pi}{2}$ oder beide gleich $-\frac{\pi}{2}$ sind, so daß die Kugeln miteinander oscillieren (Figur 38 c), dagegen ihren größten positiven oder abstossenden Wert, wenn der eine Winkel gleich $-\frac{\pi}{2}$ und der andere gleich $+\frac{\pi}{2}$ ist, so daß die Kugeln entgegengesetzt oscillieren (Figur 38 d).

Ist der eine Winkel, θ_k , gleich Null, der andere, θ_g , gleich $\frac{\pi}{2}$, so daß eine Kugel längs der Verbindungslinie, die andere senkrecht zu derselben oscilliert, so verschwindet die Kraft (b) und es tritt weder Anziehung noch Abstossung ein (Figur 38 e und f).

Schließlich betrachten wir den Fall (a), wo die Oscillationsachsen der beiden Kugeln in verschiedenen Ebenen liegen, und machen dabei die specialisierende Annahme, daß die Oscillationsachsen beider Kugeln zu der Verbindungslinie senkrecht sind, also

$\theta_g = \theta_k = \frac{\pi}{2}$ Die Kraft wird dann den Wert

$$(c) \quad \frac{\partial \Psi_{kg}}{\partial r_{kg}} = -3q \frac{\dot{S}_g \dot{S}_k \cos \vartheta}{4\pi r_{kg}^4}$$

haben; die Werte $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi$ führen dann zu dem schon

betrachteten Falle (Figur 38 c und d) zurück, wo die Oscillationsachsen in derselben Ebene lagen. $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ giebt den Fall, wo die Oscillationsachsen senkrecht sowohl zu einander, als zu der Verbindungslinie sind. Figur 38 g stellt diesen Fall dar, wenn der links gezeichnete, voll ausgezogene Kreis eine zur Ebene des Papiers senkrecht oscillierende Kugel darstellt. Die Kraft ist dann identisch Null.

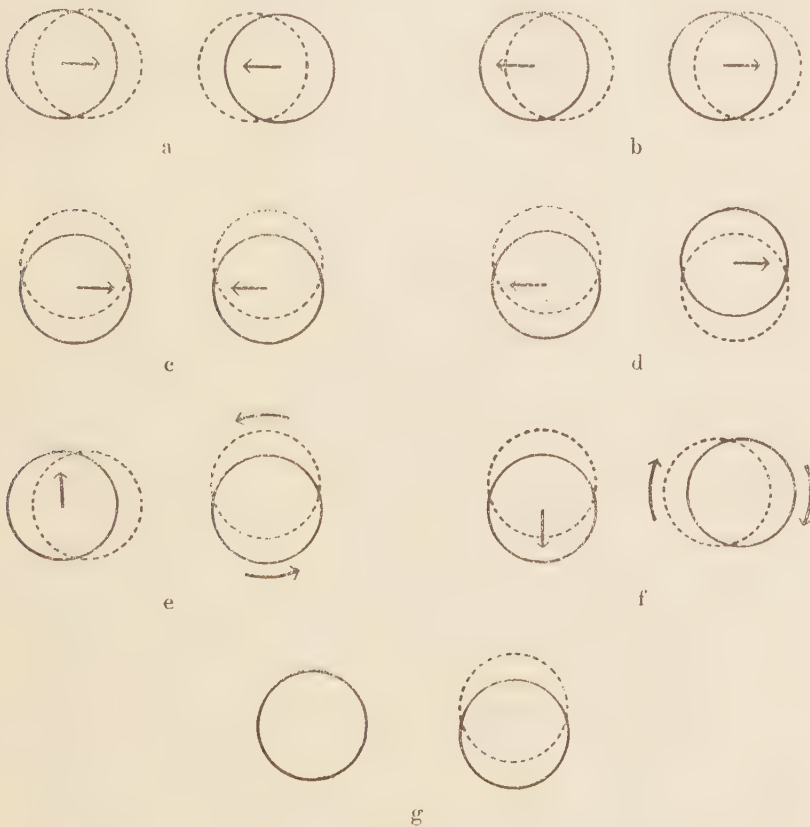


Fig. 38, a bis g. Wechselwirkungen zwischen oscillierenden Kugeln.

201. Verschiebungen und Drehungen der oscillierenden Kugeln.

— Die Drehungsmomente, welche die Winkel θ_y und ϑ zu verändern suchen, haben die Werte

$$(a) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_y} = q \dot{S}_y \dot{S}_k \frac{\cos \theta_y \sin \theta_k \cos \vartheta - 2 \sin \theta_y \cos \theta_k}{4 \pi r_{ky}^3},$$

$$(b) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} = -q \dot{S}_g \dot{S}_k \frac{\sin \theta_g \sin \theta_k \sin \vartheta}{4\pi r_{kg}^3}.$$

Das auf θ_k wirkende Drehungsmoment brauchen wir nicht zu untersuchen, da alles in Bezug auf g und k symmetrisch ist. Die Intensität der Drehungsmomente nimmt in allen Fällen umgekehrt wie die dritte Potenz des Abstandes ab.

Das Drehungsmoment in Bezug auf ϑ sucht die Kugeln oder ihre Oscillationsachsen um die Verbindungslinie der Kugeln zu drehen. Rechnet man θ_g und θ_k beide als positive Winkel kleiner als π , und ϑ als positiven oder negativen Winkel zwischen π und $-\pi$, so sucht das Drehungsmoment immer den absoluten Wert von ϑ zu verkleinern. Das Drehungsmoment hat seinen größten Wert

$$(b') \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} = -q \frac{\dot{S}_g \dot{S}_k}{4\pi r_{kg}^3},$$

wenn θ_g , θ_k und ϑ alle den Wert $\frac{\pi}{2}$ haben, so daß die Oscillationsachsen sowohl aufeinander, als auf der Verbindungslinie senkrecht stehen (Figur 38 g). Die Kugeln suchen sich dann um ihre Verbindungslinie als Achse so zu drehen, daß der Fall Figur 38 c eintritt. In dieser Lage herrscht in Bezug auf diese Drehung stabiles Gleichgewicht, in umgekehrter, wenn $\vartheta = \pi$ (Figur 38 d) instabiles Gleichgewicht. Wie man sieht, ist die stabile Lage diejenige der größten Anziehung, die instabile diejenige der größten Abstossung.

Wenn eine der Oscillationsachsen längs der Verbindungslinie der Kugeln gerichtet ist, so daß einer der Winkel θ_g oder θ_k den Wert Null oder π hat, so verschwindet dieses Drehungsmoment identisch, also beispielsweise in den durch die Figuren 38 e und f dargestellten Fällen.

Wir betrachten dann das Drehungsmoment (a). Der Winkel θ_g kann sich auf verschiedene Weise ändern: entweder kann sich die Oscillationsachse der Kugel g drehen; oder die Oscillationsrichtung der Kugel g bleibt unverändert, und die Kugel k wird längs einer Kreisperipherie um die Kugel g verschoben. Für diese Drehung der Kugel g und für die entsprechende Verschiebung der Kugel k gilt das Prinzip von gleicher Wirkung und Gegenwirkung, während dagegen die Drehungen, wobei sich in einem Falle der Winkel θ_g und im anderen Falle der Winkel θ_k verändert, voneinander unabhängig sind.

Wenn die Veränderung des Winkels θ_g darauf beruht, daß sich die Kugel k verschiebt, so kann man auch anstatt des Drehungs-

momentes die lineare Kraft betrachten, welche die Kugel k bewegt. Den Wert dieser linearen Kraft findet man durch Division des Drehungsmomentes (a') durch den Abstand r_{kg} . Diese senkrecht zu der Verbindungslinie der Kugeln stehende Kraft nimmt also, genau wie die radial gerichtete, umgekehrt wie die vierte Potenz des Abstandes ab.

Wenn die Oscillationsachsen in ein und dieselbe Ebene fallen, verschwindet das Drehungsmoment (b). Dies tritt ein, wenn θ gleich 0 oder π ist. Von diesen Werten brauchen wir nur den ersten in Betracht zu ziehen, wenn wir θ_g und θ_k sowohl positive als negative Werte zwischen π und $-\pi$ annehmen lassen. Das Drehungsmoment (a) vereinfacht sich dann auf

$$(a') \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_g} = q \dot{S}_g \dot{S}_k \frac{\cos \theta_g \sin \theta_k - 2 \sin \theta_g \cos \theta_k}{4 \pi r_{kg}^3}.$$

Dieses Drehungsmoment verschwindet, wenn

$$(c) \quad \operatorname{tg} \theta_g = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta_k.$$

Nach dieser Gleichung kann man leicht den Wert des Winkels θ_g konstruieren, für welchen das Gleichgewicht eintritt, wenn der Wert des unveränderlichen Winkels θ_k gegeben ist. Man erkennt leicht nach der Gleichung, daß in Bezug auf diese Drehung Gleichgewicht herrscht in den durch Figur 38 a, b, c, d dargestellten Fällen, wobei die Lagen der größten Anziehung (a und c) stabile, die Lagen der größten Abstossung (b und d) instabile Gleichgewichtslagen sind.

Ist $\theta_k = 0$, $\theta_g = \frac{\pi}{2}$ (Fig. 38 e), so hat das Drehungsmoment (a') seinen größten Wert:

$$(a'') \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_g} = -2q \frac{\dot{S}_g \dot{S}_k}{4 \pi r_{kg}^3}$$

und sucht den Winkel θ_g zu verkleinern, so daß die Lage der größten Anziehung (Figur 38 a) eintritt. Die Verkleinerung des Winkels θ_g kann dabei in zweifacher Weise geschehen, durch Drehung der Kugel g oder durch Verschiebung der Kugel k auf einem Kreis um g . Ist $\theta_k = \frac{\pi}{2}$ und $\theta_g = 0$ (Figur 38 f), so hat das Drehungsmoment den Wert

$$(a''') \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_g} = q \frac{\dot{S}_g \dot{S}_k}{4 \pi r_{kg}^3}$$

und sucht den Winkel θ_g zu vergrößern, so daß die Anziehungslage Figur 38 c eintritt. Diese Vergrößerung von θ_g kann wieder dadurch geschehen, daß entweder die Kugel g gedreht, oder die Kugel k kreisförmig um g verschoben wird.

Die Anziehungen, Abstosungen, Verschiebungen und Drehungen der oscillierenden Kugeln haben vollständig das Aussehen von Fernwirkungen: jede Kugel bewegt sich so, als ob sie mit Bewußtsein eine bestimmte Lage relativ zu der entfernten Kugel suche. Alles beruht aber nur auf der Wechselwirkung jeder Kugel und den sie unmittelbar umgebenden Flüssigkeitsmassen: jede Kugel befindet sich in dem von der anderen Kugel herrührenden Einfallsstrome, und sucht sich in diesem Strome nach der Regel von der möglichst großen Zunahme der Konfliktgeschwindigkeit zu verschieben oder zu drehen.

202. Analogien mit den elektrischen und magnetischen Fernkräften. — Gleichzeitig mit den somit in allen Einzelheiten diskutierten Fernkräften energetischer Natur zwischen den pulsierenden und oscillierenden Kugeln wirkt im Verborgenen die Induktionskraft und zwingt, ohne jede Rücksicht auf Gleichheit der Wirkung und der Gegenwirkung, jede Kugel die Oscillationen der umgebenden Flüssigkeit mit etwas vergrößerten oder etwas verkleinerten Amplituden mitzumachen. Diese Amplituden sind aber nicht meßbar, und die entsprechenden temporären Aktionsmomente werden nur Energiekräfte höherer Ordnungen veranlassen, die wegen der vorausgesetzten beschränkten Genauigkeit der Kraftmessungen nicht entdeckt werden. Trotzdem übertrifft diese im Verborgenen wirkende Induktionskraft im Falle der kleinen Schwingungen weit die Energiekraft an Intensität (124), so daß die Weglängen, welche die Kugeln in den inducierten Oscillationen zurücklegen, groß sind im Vergleich zu den Weglängen, welche sie in ihren sichtbaren progressiven Bewegungen unter dem Einflusse der Energiekraft zurücklegen.

Von diesen, sich im Verborgenen abspielenden Vorgängen wird also ein Beobachter mit beschränktem Wahrnehmungsvermögen keine Ahnung haben. Er wird nur Fernkräfte entdecken, welche alle die in den NEWTON'schen Bewegungsgesetzen verlangten Eigenschaften haben: sind mehr als zwei Kugeln vorhanden, so werden sich die von den einzelnen Kugeln herrührenden Kräfte nach dem Parallelogrammgesetz zusammensetzen; die Kräfte sind von den sichtbaren translatorischen Geschwindigkeiten der Kugeln unabhängig; die Wir-

kung ist der Gegenwirkung gleich; und schliesslich ist noch hinzuzufügen, dass die Kräfte konservativer Natur sind.

Aufser diesen Eigenschaften allgemeiner Natur tritt aber auch noch eine Eigentümlichkeit hervor: die Kräfte zeigen eine auffällige Ähnlichkeit mit den Fernkräften zwischen elektrischen oder magnetischen Körpern; die für die Wechselwirkungen der Kugeln aufgestellten Kräftefunktionen sind ähnlich gebaut wie die Ausdrücke der gegenseitigen potentiellen Energie für elektrisch geladene Körper oder für Elementarmagnete; interpretiert man in den vorhergehenden Formeln die Volumänderungsgeschwindigkeit \dot{V} als elektrische Ladung oder magnetische Polstärke, das Aktionsmoment $(\dot{P}, \dot{Q}, \dot{H})$ als magnetisches Moment, so unterscheiden sich die entwickelten Kräftefunktionsausdrücke nur um einen numerischen Faktor von den Ausdrücken der gegenseitigen potentiellen Energie elektrischer oder magnetischer Teilchen, so wie diese Ausdrücke gewöhnlich geschrieben werden. Von diesem numerischen Faktor abgesehen, stellt dann die Kräftefunktion 196(b) für die Wechselwirkung pulsierender Kugeln die gegenseitige potentielle Energie zweier elektrisch geladener Teilchen oder zweier Magnetpole dar; die Kräftefunktion 197(a) für die Wechselwirkung einer pulsierenden und einer oszillierenden Kugel die gegenseitige potentielle Energie eines Magnetpoles und eines Elementarmagnetes; und die Kräftefunktion 198(a) für die Wechselwirkung zweier oszillierenden Kugeln die gegenseitige potentielle Energie zweier Elementarmagnete.

Noch auffälliger wird die Ähnlichkeit, wenn man die elektrischen und magnetischen Formeln nicht in der traditionellen Weise schreibt, sondern in derjenigen Form, welche sie erhalten, wenn man die alten gewöhnlichen Einheiten durch die von HEAVISIDE vorgeschlagenen rationellen Einheiten ersetzt.¹ Denn wenn man diese Einheiten benutzt, so fällt auch der numerische Faktor fort, und unsere Kräftefunktionen können ohne weiteres als Ausdrücke der gegenseitigen potentiellen Energie der elektrischen oder der magnetischen Teilchen interpretiert werden.

Es wird deshalb nur ein einziger Unterschied zwischen den hydrodynamischen und den elektrischen oder magnetischen Fernkräften sein: was in dem einen Falle Kräftefunktion ist, ist im anderen Falle potentielle Energie. Aus der Kräftefunktion finden wir die Kraftkomponenten durch positive, aus der potentiellen Energie

¹ O. HEAVISIDE, *Electromagnetic Theory*, London 1893. Vol. I, p. 116—125.

durch negative Ableitung nach den Koordinaten, so daß die Kräfte immer entgegengesetzt gerichtet sind.

Eine genauere systematische Untersuchung dieser inversen Analogie in ihrem Zusammenhange mit den früher schon mehrmals hervorgetretenen direkten Analogien werden wir uns für später vorbehalten. Vorläufig können wir aber auf Grundlage dieser Analogie zweckmäßige Gedächtnisregeln aufstellen, nach denen man die Wechselwirkungen der Kugeln leicht überblicken kann, indem man sie mit den bekannten elektrischen oder magnetischen Fernwirkungen vergleicht. Am zweckmäßigsten bedienen wir uns dabei nur der Ähnlichkeit mit den magnetischen Erscheinungen, wobei also die pulsierende Kugel mit einem isolierten magnetischen Pole, und die oscillierende Kugel mit einem vollständigen Elementarmagnet zu vergleichen ist, dessen magnetische Achse mit der Oscillationsachse zusammenfällt.

Zur Feststellung der Namen der Pole leitet man aus unseren Regeln für das Vorzeichen der Pulsationsintensitäten und der Aktionsmomente leicht die folgende Regel ab:

(A) *Man beobachtet die synchron pulsierenden und oscillierenden Kugeln zu einer gewissen, beliebig gewählten Anfangszeit, und nennt eine pulsierende Kugel einen Nordpol, wenn sie sich zu dieser Zeit ausdehnt, einen Südpol, wenn sie sich zu dieser Zeit zusammenzieht; weiter nennt man den zu dieser Zeit vorangehenden Pol einer oscillierenden Kugel ihren Nordpol, den nachfolgenden ihren Südpol.*

Wenn man die Namen der Pole nach dieser Regel festgestellt hat, leitet man die eintretenden Fernwirkungen nach der folgenden Regel ab:

(B) *Die Fernwirkungen zwischen den pulsierenden und den oscillierenden Kugeln verlaufen nach den Gesetzen für die Fernwirkungen zwischen magnetischen Polen und Elementarmagneten, nur nach dem verkehrten Polgesetze: gleichnamige Pole ziehen einander an, ungleichnamige stoßen einander ab.*

Man überzeugt sich leicht von der Brauchbarkeit dieser Regel, beispielsweise in den durch die Figuren 36, 37 und 38 dargestellten Fällen. Die Figuren können als eine Darstellung der Bewegung zu der gewählten Anfangszeit betrachtet werden; die durch einen punktierten äußeren und einen voll ausgezogenen inneren Kreis dargestellten pulsierenden Kugeln sind dann Nordpole, die umgekehrt

durch einen voll ausgezogenen äusseren und einen punktierten inneren Kreis dargestellten sind Südpole; die magnetischen Achsen der oscillierenden Kugeln sind von dem Mittelpunkte des voll ausgezogenen nach dem Mittelpunkte des punktierten Kreises gerichtet.

Neunter Abschnitt.

Hydrodynamische Fernkräfte höherer Ordnung. Temporäre Wechselwirkungen zwischen zwei Kugeln.

203. Grenze der Brauchbarkeit unserer Formeln. — Nachdem jetzt die Theorie der hydrodynamischen Fernkräfte niederer Ordnung erledigt ist, gehen wir zur Betrachtung der Fernkräfte höherer Ordnungen über. Dabei brauchen wir nur die Kräfte zu berücksichtigen, die wir temporäre Energiekräfte genannt haben. Allerdings bestehen auch inducierende Kräfte höherer Ordnungen; da aber schon die inducierenden Kräfte der niederen Ordnungen nur verborgene Wirkungen haben, wird dasselbe um so mehr mit den inducierenden Kräften höherer Ordnung der Fall sein.

Wenn wir zu der Untersuchung dieser höheren Energiekräfte übergehen, können wir uns auf den Standpunkt eines Beobachters gestellt denken, der aufser den schon untersuchten Kräften, die klein zweiter bis vierter Ordnung waren, auch noch im stande ist, Kräfte fünfter bis siebenter Ordnung zu messen.

Dabei ist aber zu bemerken, dass wir die Grenze der Verwendbarkeit unserer fundamentalen Kraftformeln überschreiten, sofern nicht gewisse Reservationen gemacht werden.

Die temporären Kräfte sind klein fünfter Ordnung, wenn sie nur auf Volumänderungen, und siebenter Ordnung, wenn sie nur auf Translationsbewegungen beruhen. Gleichzeitig sind unsere Fundamentalformeln nach dem Satze 159 brauchbar zur Diskussion von kleinen Kräften sechster Ordnung einschliesslich, sofern pulsierende Kugeln vorkommen, und achter Ordnung einschliesslich, sofern keine pulsierenden, sondern nur oscillierende Kugeln vorkommen. Nehmen wir deshalb gleichzeitige Pulsationen und Oscillationen der Kugeln an, so können die nicht berücksichtigten Kraftglieder die gleiche Grösse wie die berücksichtigten erreichen. Diesem Übelstande werden

wir aber entgehen, wenn wir eine der beiden folgenden Voraussetzungen machen:

Im Kugelsystem kommen Pulsationen vor, nicht aber andere Oscillationen, als die von entfernten pulsierenden Kugeln inducierten.

Oder:

Im Kugelsystem kommen permanente Oscillationen beliebiger Intensität vor, nicht aber Pulsationen.

Einleitungsweise werden wir jetzt erst die beiden einfachsten Fälle temporärer Fernkraft explicite untersuchen, wo nur zwei Kugeln vorkommen, von denen die eine neutral, die andere entweder pulsierend oder oscillierend ist.

204. Inducierende Wirkung einer pulsierenden Kugel auf eine neutrale. — Von den beiden Kugeln sei zunächst die eine k nur pulsierend, die andere g von unveränderlichem Volumen und ohne Eigenbewegung der Flüssigkeit überlassen.

Die pulsierende Kugel erzeugt dann, wenn sie allein vorhanden ist, einen Strom mit dem Potential:

$$(a) \quad \varphi_k = - \frac{\dot{E}_k}{4\pi r_k}.$$

Dieser Strom wirkt auf die Kugel g inducierend, so daß dieselbe ein temporäres Aktionsmoment (\dot{E}_g^t , \dot{G}_g^t , \dot{H}_g^t) erhält. Mit diesem Aktionsmoment in eine ursprünglich ruhende Flüssigkeit eingebracht, würde sie einen Strom mit dem Potential

$$(b) \quad \varphi_g = - \left\{ \dot{E}_g^t \frac{\partial}{\partial a_g} \frac{1}{4\pi r_g} + \dot{G}_g^t \frac{\partial}{\partial b_g} \frac{1}{4\pi r_g} + \dot{H}_g^t \frac{\partial}{\partial c_g} \frac{1}{4\pi r_g} \right\}$$

erzeugen.

Die hier auftretenden temporären Aktionsmomente haben nach 121 die Werte:

$$\begin{aligned} \dot{E}_g^t &= \frac{3}{2} \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2}q} E_g \dot{\alpha} \\ (c) \quad \dot{G}_g^t &= \frac{3}{2} \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2}q} E_g \dot{\beta} \\ \dot{H}_g^t &= \frac{3}{2} \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2}q} E_g \dot{\gamma}, \end{aligned}$$

wo Q_g die Dichte der Kugel g ist, und wo ($\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$) die Geschwindigkeit darstellt, welche der von der Kugel k herrührende Einfallstrom

im Punkte g hat. Das inducierte Aktionsmoment der Kugel g ist also immer längs der Stromlinien des von der pulsierenden Kugel k ausgehenden Aktionsstromes gerichtet.

Die expliziten Ausdrücke dieses Aktionsmomentes, wenn wir es als das Resultat der Thätigkeit einer von der Kugel k ausgehenden fernwirkenden Induktionskraft betrachten, erhalten wir, wenn wir $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ als die Ableitungen nach a_g , b_g und c_g des Potentials $(\varphi_k)_g$ darstellen. Also:

$$\begin{aligned} \dot{F}_g^t &= -\frac{3}{2} \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2}q} E_g \frac{\partial}{\partial a_g} \frac{\dot{E}_k}{4\pi r_{kg}} \\ (d) \quad \dot{G}_g^t &= -\frac{3}{2} \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2}q} E_g \frac{\partial}{\partial b_g} \frac{\dot{E}_k}{4\pi r_{kg}} \\ \dot{H}_g^t &= -\frac{3}{2} \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2}q} E_g \frac{\partial}{\partial c_g} \frac{\dot{E}_k}{4\pi r_{kg}}. \end{aligned}$$

Während die von k ausgehende fernwirkende Induktionskraft dieses Aktionsmoment in g induciert, wird die Kugel g wiederum ein Aktionsmoment in der Kugel k inducieren. Es besteht aber kein Gegenwirkungsprincip für die Induktionskraft; die Induktionen hin und zurück sind von verschiedenen, und zwar immer steigenden Größenordnungen, so daß wir alle höheren Induktionen außer Betracht setzen können.

205. Kräftefunktion der energetischen Wechselwirkung zwischen einer pulsierenden und einer neutralen Kugel. — Die Energiekräfte, mit denen unter diesen Umständen die Kugeln k und g gegenseitig aufeinander wirken, haben die allgemeine Form 160 (e) und beruhen darauf, daß sich die Kugel g mit ihrem inducierten Aktionsmoment in demjenigen Strome befindet, welcher von den Pulsationen der Kugel k herrührt, und daß sich umgekehrt die pulsierende Kugel in demjenigen Strome befindet, welcher von den temporär inducierten Oscillationen der Kugel g herrührt.

Die gegen g wirkende Energiekraft hat deshalb die x -Komponente

$$(a) \quad X_{kg} = -q \left\{ (\dot{\alpha}_a)_p \dot{F}_g^t + (\dot{\alpha}_\beta)_p \dot{G}_g^t + (\dot{\alpha}_\gamma)_p \dot{H}_g^t \right\},$$

wo $(\dot{\alpha}_a)_p$, $(\dot{\alpha}_\beta)_p$, diejenigen zweiten Ableitungen sind, welche φ_k im Punkte g hat. Und die Rückwirkung der Kugel g auf die Kugel k hat die x -Komponente

$$(b) \quad X_{gk} = -q \dot{\alpha}_t \dot{E}_k,$$

wo $\dot{\alpha}_i$ die x -Komponente derjenigen Geschwindigkeit bedeutet, welche der von den temporären Oscillationen der Kugel g herrührende Einfallstrom im Punkte k hat.

Die erste dieser Kräfte haben wir schon studiert (134—136); nur daß wir im vorliegenden Falle explicite diejenige entfernte Kugel k berücksichtigen, welche den die Kugel g umgebenden Strom erzeugt. Nach der Substitution der Werte 204(c) der Komponenten des inducierten Aktionsmomentes in die Formel (a) nimmt die Kraft die potentielle Form 134(c) an, wo die Kräftefunktion den Wert

$$(c) \quad \Psi_{kg} = -\frac{3}{4} q \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2} q} E_g \left\{ \dot{\alpha}_p^2 + \dot{\beta}_p^2 + \dot{\gamma}_p^2 \right\}$$

hat, oder schließlic, wenn wir $\dot{\alpha}_p, \dot{\beta}_p, \dot{\gamma}_p$ als die Ableitungen von q_k im Punkte g ausdrücken:

$$(c') \quad \Psi_{kg} = -\frac{3}{4} q \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2} q} E_g \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial a_g} \frac{\dot{E}_k}{4\pi r_{kg}} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial b_g} \frac{\dot{E}_k}{4\pi r_{kg}} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial c_g} \frac{\dot{E}_k}{4\pi r_{kg}} \right)^2 \right\}.$$

Um die zweite Kraft (b) explicite zu berechnen, haben wir $\dot{\alpha}_i, \dot{\beta}_i, \dot{\gamma}_i$ aus q_g zu bilden durch Differentiation nach x, y, z und nachherige Substitution $x = a_k, y = b_k, z = c_k$. Das x, y, z kommt nur in r_g vor. Bei der Differentiation dieser Größe können wir r_g durch r_{kg} ersetzen, und nach a_k, b_k, c_k differenzieren. Die erste Geschwindigkeitskomponente erhalten wir deshalb in der Form:

$$\dot{\alpha}_i = - \left\{ \dot{F}_g^t \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{G}_g^t \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial b_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{H}_g^t \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial c_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right\}.$$

Hier haben wir zum ersten Male ein Beispiel des oft erwähnten Falles, wo man nicht in der Weise vorgehen darf, daß man erst in q_g die Substitution ausführt und dann das $(q_g)_k$ nach a_k, b_k, c_k differenziert. Denn das q_g enthält schon vor der Substitution a_k, b_k, c_k , da nämlich diese Größen in den Koeffizienten $\dot{F}_g^t, \dot{G}_g^t, \dot{H}_g^t$ vorkommen, und nach den in diese Koeffizienten eingehenden a_k, b_k, c_k darf nicht differenziert werden.

Als Ausdruck der ersten Kraftkomponente X_{gk} findet man jetzt:

$$X_{gk} = q \dot{F}_k^t \left\{ \dot{F}_g^t \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{G}_g^t \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial b_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{H}_g^t \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial c_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right\}.$$

Durch Einsetzen der Werte 204(d) von $\dot{F}_g^t, \dot{G}_g^t, \dot{H}_g^t$ scheidet sich der Faktor

$$(d) \quad -\frac{3}{2}q \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2}q} E_g$$

aus, während die Parenthese die Form

$$\frac{\partial}{\partial a_g} \frac{\dot{E}_k}{4\pi r_{kg}} \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_g} \frac{\dot{E}_k}{4\pi r_{kg}} + \frac{\partial}{\partial b_g} \frac{\dot{E}_k}{4\pi r_{kg}} \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial b_g} \frac{\dot{E}_k}{4\pi r_{kg}} + \frac{\partial}{\partial c_g} \frac{\dot{E}_k}{4\pi r_{kg}} \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial c_g} \frac{\dot{E}_k}{4\pi r_{kg}}$$

annimmt. Dies ist die Ableitung nach a_k von dem Polynom:

$$(e) \quad \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial a_g} \frac{\dot{E}_k}{4\pi r_{kg}} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial b_g} \frac{\dot{E}_k}{4\pi r_{kg}} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial c_g} \frac{\dot{E}_k}{4\pi r_{kg}} \right)^2 \right\}.$$

Das Produkt dieses Polynoms in dem Faktor (d) stellt also die Kräftefunktion der gesuchten Kraft dar. Diese Kräftefunktion ist aber mit der oben gefundenen (c') identisch.

Die Wirkung und die Gegenwirkung lassen sich also durch dieselbe Kräftefunktion Ψ_{kg} ausdrücken, und aus der entgegengesetzten Gleichheit der Ableitungen folgt die entgegengesetzte Gleichheit der Kräfte.

206. Inducierende Wirkung einer oscillierenden Kugel auf eine neutrale. — Es seien wieder nur zwei Kugeln vorhanden, eine Kugel k mit permanenten Oscillationen und eine Kugel g , welche nur die von k herrührenden, inducierten Oscillationen besitzt.

Die Geschwindigkeitspotentiale der beiden Kugeln können dann

$$(a) \quad \begin{aligned} \varphi_k &= - \left\{ \dot{F}_k^p \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{4\pi r_k} + \dot{G}_k^p \frac{\partial}{\partial b_k} \frac{1}{4\pi r_k} + \dot{H}_k^p \frac{\partial}{\partial c_k} \frac{1}{4\pi r_k} \right\} \\ \varphi_g &= - \left\{ \dot{F}_g^t \frac{\partial}{\partial a_g} \frac{1}{4\pi r_g} + \dot{G}_g^t \frac{\partial}{\partial b_g} \frac{1}{4\pi r_g} + \dot{H}_g^t \frac{\partial}{\partial c_g} \frac{1}{4\pi r_g} \right\} \end{aligned}$$

geschrieben werden. Hier ist das Aktionsmoment (\dot{F}_g^t , \dot{G}_g^t , \dot{H}_g^t) der Kugel g ein induciertes, dessen Komponenten durch die Formeln 204(c) gegeben sind. Dasselbe ist also der Geschwindigkeit in dem der Kugel k zugehörenden Felde proportional und folglich längs der Stromlinien dieses Feldes gerichtet.

Drücken wir das $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ dieser Formeln als die Komponenten derjenigen Geschwindigkeit aus, welche der von der Kugel k herrührende Einfallstrom im Punkte g hat, so ergibt sich explicite für das inducierte Aktionsmoment

$$\begin{aligned} \dot{H}_g^t &= -\frac{3}{2} \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2}q} E_g \left\{ \dot{H}_k^p \frac{\partial^2}{\partial a_g \partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{G}_k^p \frac{\partial^2}{\partial a_g \partial b_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{H}_k^p \frac{\partial^2}{\partial a_g \partial c_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right\} \\ (b) \quad \dot{G}_g^t &= -\frac{3}{2} \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2}q} E_g \left\{ \dot{H}_k^p \frac{\partial^2}{\partial b_g \partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{G}_k^p \frac{\partial^2}{\partial b_g \partial b_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{H}_k^p \frac{\partial^2}{\partial b_g \partial c_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right\} \\ \dot{H}_g^t &= -\frac{3}{2} \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2}q} E_g \left\{ \dot{H}_k^p \frac{\partial^2}{\partial c_g \partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{G}_k^p \frac{\partial^2}{\partial c_g \partial b_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{H}_k^p \frac{\partial^2}{\partial c_g \partial c_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right\}. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke geben das inducierte Aktionsmoment der Kugel g als eine Gröfse, deren Ursprung auf die Wirksamkeit der von der Kugel k ausgehenden inducierenden Fernkraft zurückzuführen ist.

Die inducierende Gegenwirkung der Kugel g auf die Kugel k kann wieder als eine Wirkung höherer Ordnung vernachlässigt werden.

207. Kräftefunktion der energetischen Wechselwirkung zwischen einer oscillierenden und einer neutralen Kugel. — Nach den allgemeinen Formeln 160 (e) finden wir als x -Komponente derjenigen temporären Energiekraft, welche die Kugel g erleidet

$$(a) \quad X_{kg} = -q \left\{ (\dot{\alpha}_a)_p \dot{H}_g^t + (\dot{\alpha}_\beta)_p \dot{G}_g^t + (\dot{\alpha}_\gamma)_p \dot{H}_g^t \right\},$$

wo $(\dot{\alpha}_a)_p, (\dot{\alpha}_\beta)_p, (\dot{\alpha}_\gamma)_p$ diejenigen deformativen Geschwindigkeitskomponenten sind, welche der von den permanenten Oscillationen der Kugel k ausgehende Aktionsstrom im Punkte g hat. Aus denselben allgemeinen Formeln findet man für die Gegenwirkung, welche g gegen k ausübt, die x -Komponente

$$(b) \quad X_{gk} = -q \left\{ (\dot{\alpha}_a)_t \dot{H}_k^p + (\dot{\alpha}_\beta)_t \dot{G}_k^p + (\dot{\alpha}_\gamma)_t \dot{H}_k^p \right\},$$

wo umgekehrt $(\dot{\alpha}_a)_t, (\dot{\alpha}_\beta)_t, (\dot{\alpha}_\gamma)_t$ diejenigen deformativen Geschwindigkeiten bedeuten, welche der von den inducierten Oscillationen der Kugel g ausgehende Aktionsstrom im Punkte k hat.

Die erste dieser Kräfte hat wieder eine Kräftefunktion von der bekannten Form 205 (c), die der Energie des Einfallsstromes proportional ist, in dem sich die Kugel g befindet. Führen wir hier die expliciten Ausdrücke der Geschwindigkeitskomponenten $\dot{\alpha}_p, \dot{\beta}_p, \dot{\gamma}_p$ ein, so ergibt sich als Kräftefunktion derjenigen Kraft, mit der k auf g wirkt:

$$\begin{aligned}
 \psi_{kg} = & -\frac{3}{4} q \frac{q-Q_g}{Q_g+\frac{1}{2}q} E_g \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial a_g} \left(\dot{F}_k^p \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{G}_k^p \frac{\partial}{\partial b_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{H}_k^p \frac{\partial}{\partial c_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right) \right]^2 \right. \\
 (c) \quad & + \left[\frac{\partial}{\partial b_g} \left(\dot{F}_k^p \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{G}_k^p \frac{\partial}{\partial b_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{H}_k^p \frac{\partial}{\partial c_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right) \right]^2 \\
 & \left. + \left[\frac{\partial}{\partial c_g} \left(\dot{F}_k^p \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{G}_k^p \frac{\partial}{\partial b_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{H}_k^p \frac{\partial}{\partial c_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right) \right]^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Um die Gegenwirkung der Kugel g gegen die Kugel k zu untersuchen, müssen wir aus φ_g die im Ausdrucke von X_{gk} vorkommenden deformativen Geschwindigkeiten $(\dot{\alpha}_\alpha)_l, (\dot{\alpha}_\beta)_l, (\dot{\alpha}_\gamma)_l$ bilden. Dies geschieht durch zweimalige Differentiation von φ_g nach x, y und z und nachherige Substitution $x = a_k, y = b_k, z = c_k$. Das Resultat läßt sich, wie man sofort sieht, in der folgenden Form ausdrücken, wo x, y, z schon verschwunden sind:

$$\begin{aligned}
 (\dot{\alpha}_\alpha)_t &= - \left\{ \dot{F}_g^t \frac{\partial^3}{\partial a_k^2 \partial a_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{G}_g^t \frac{\partial^3}{\partial a_k^2 \partial b_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{H}_g^t \frac{\partial^3}{\partial a_k^2 \partial c_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right\} \\
 (\dot{\alpha}_\beta)_t &= - \left\{ \dot{F}_g^t \frac{\partial^3}{\partial a_k \partial b_k \partial a_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{G}_g^t \frac{\partial^3}{\partial a_k \partial b_k \partial b_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{H}_g^t \frac{\partial^3}{\partial a_k \partial b_k \partial c_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right\} \\
 (\dot{\alpha}_\gamma)_t &= - \left\{ \dot{F}_g^t \frac{\partial^3}{\partial a_k \partial c_k \partial a_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{G}_g^t \frac{\partial^3}{\partial a_k \partial c_k \partial b_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{H}_g^t \frac{\partial^3}{\partial a_k \partial c_k \partial c_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right\}.
 \end{aligned}$$

Zu diesen Formeln wird man dagegen nicht kommen, wenn man in φ_g erst die Substitution $x = a_k, y = b_k, z = c_k$ ausführt, und nachher nach a_k, b_k, c_k differentiiert.

Wenn wir diese Werte im Ausdrucke von X_{gk} einführen, ergibt sich

$$\begin{aligned}
 X_{gk} = & q \left\{ \dot{F}_k^p \dot{F}_g^t \frac{\partial^3}{\partial a_k^2 \partial a_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{F}_k^p \dot{G}_g^t \frac{\partial^3}{\partial a_k^2 \partial b_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{F}_k^p \dot{H}_g^t \frac{\partial^3}{\partial a_k^2 \partial c_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right. \\
 & + \dot{G}_k^p \dot{F}_g^t \frac{\partial^3}{\partial a_k \partial b_k \partial a_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{G}_k^p \dot{G}_g^t \frac{\partial^3}{\partial a_k \partial b_k \partial b_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{G}_k^p \dot{H}_g^t \frac{\partial^3}{\partial a_k \partial b_k \partial c_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \\
 & \left. + \dot{H}_k^p \dot{F}_g^t \frac{\partial^3}{\partial a_k \partial c_k \partial a_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{H}_k^p \dot{G}_g^t \frac{\partial^3}{\partial a_k \partial c_k \partial b_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{H}_k^p \dot{H}_g^t \frac{\partial^3}{\partial a_k \partial c_k \partial c_g} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right\}.
 \end{aligned}$$

Wenn wir hier nach 206 (b) die Werte von $\dot{F}_g^t, \dot{G}_g^t, \dot{H}_g^t$ substituieren, so scheidet sich ein gemeinschaftlicher Faktor

$$(d) \quad -\frac{3}{2} q \frac{q-Q_g}{Q_g+\frac{1}{2}q} E_g$$

aus, während die Parenthese ein homogenes Polynom zweiten Grades in $\dot{F}_k^p, \dot{G}_k^p, \dot{H}_k^p$ wird. Der Koeffizient von \dot{F}_k^{p2} wird die Form

$$\frac{\partial^2}{\partial a_g \partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \frac{\partial^3}{\partial a_k \partial a_g} \frac{1}{4\pi r_{gk}} + \frac{\partial^2}{\partial b_g \partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \frac{\partial^3}{\partial a_k \partial b_g} \frac{1}{4\pi r_{gk}} + \frac{\partial^2}{\partial c_g \partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \frac{\partial^3}{\partial a^2 \partial c_g} \frac{1}{4\pi r_{gk}}$$

haben, und läßt sich folglich einfacher

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a_k} \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial a_g \partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial b_g \partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial c_g \partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right)^2 \right\}$$

schreiben. In ähnlicher Weise werden die Koeffizienten von \dot{G}_k^{p2} und \dot{H}_k^{p2} Ableitungen nach a_k von Ausdrücken, die man nach Symmetrie bildet. Weiter findet man als Koeffizient des rektangulären Gliedes $\dot{G}_k^p \dot{H}_k^p$:

$$\frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial a_g \partial b_k} \frac{1}{r_{kg}} \frac{\partial^3}{\partial a_k \partial c_k \partial a_g} \frac{1}{r_{gk}} + \frac{\partial^2}{\partial b_g \partial b_k} \frac{1}{r_{kg}} \frac{\partial^3}{\partial a_k \partial c_k \partial b_g} \frac{1}{r_{gk}} + \frac{\partial^2}{\partial c_g \partial b_k} \frac{1}{r_{kg}} \frac{\partial^3}{\partial a_k \partial c_k \partial c_g} \frac{1}{r_{gk}} \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial a_g \partial c_k} \frac{1}{r_{kg}} \frac{\partial^3}{\partial a_k \partial b_k \partial a_g} \frac{1}{r_{gk}} + \frac{\partial^2}{\partial b_g \partial c_k} \frac{1}{r_{kg}} \frac{\partial^3}{\partial a_k \partial b_k \partial b_g} \frac{1}{r_{gk}} + \frac{\partial^2}{\partial c_g \partial c_k} \frac{1}{r_{kg}} \frac{\partial^3}{\partial a_k \partial b_k \partial c_g} \frac{1}{r_{gk}} \right\}$$

oder einfacher:

$$\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\partial}{\partial a_k} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial a_g \partial b_k} \frac{1}{r_{kg}} \frac{\partial^2}{\partial a_g \partial c_k} \frac{1}{r_{gk}} + \frac{\partial^2}{\partial b_g \partial b_k} \frac{1}{r_{kg}} \frac{\partial^2}{\partial b_g \partial c_k} \frac{1}{r_{gk}} + \frac{\partial^2}{\partial c_g \partial b_k} \frac{1}{r_{kg}} \frac{\partial^2}{\partial c_g \partial c_k} \frac{1}{r_{gk}} \right\}.$$

Die Koeffizienten von $\dot{H}_k^p \dot{F}_k^p$ und $\dot{F}_k^p \dot{G}_k^p$ sind Ableitungen nach a_k von ähnlichen Ausdrücken, die man nach Symmetrie aus dem Klammerausdrucke bildet. Das zu bildende Polynom läßt sich deshalb als die Ableitung nach a_k von dem Ausdrucke

$$(e) \quad \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{2} \dot{F}_k^{p2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial a_g \partial a_k} \frac{1}{r_{kg}} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial b_g \partial a_k} \frac{1}{r_{kg}} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial c_g \partial a_k} \frac{1}{r_{kg}} \right)^2 \right] \right. \\ + \frac{1}{2} \dot{G}_k^{p2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial a_g \partial b_k} \frac{1}{r_{kg}} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial b_g \partial b_k} \frac{1}{r_{kg}} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial c_g \partial b_k} \frac{1}{r_{kg}} \right)^2 \right] \\ + \frac{1}{2} \dot{H}_k^{p2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial a_g \partial c_k} \frac{1}{r_{kg}} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial b_g \partial c_k} \frac{1}{r_{kg}} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial c_g \partial c_k} \frac{1}{r_{kg}} \right)^2 \right] \\ + \dot{G}_k^p \dot{H}_k^p \left[\frac{\partial^2}{\partial a_g \partial b_k} \frac{1}{r_{kg}} \frac{\partial^2}{\partial a_g \partial c_k} \frac{1}{r_{gk}} + \frac{\partial^2}{\partial b_g \partial b_k} \frac{1}{r_{kg}} \frac{\partial^2}{\partial b_g \partial c_k} \frac{1}{r_{gk}} + \frac{\partial^2}{\partial c_g \partial b_k} \frac{1}{r_{kg}} \frac{\partial^2}{\partial c_g \partial c_k} \frac{1}{r_{gk}} \right] \\ + \dot{H}_k^p \dot{F}_k^p \left[\frac{\partial^2}{\partial a_g \partial c_k} \frac{1}{r_{kg}} \frac{\partial^2}{\partial a_g \partial a_k} \frac{1}{r_{gk}} + \frac{\partial^2}{\partial b_g \partial c_k} \frac{1}{r_{kg}} \frac{\partial^2}{\partial b_g \partial a_k} \frac{1}{r_{gk}} + \frac{\partial^2}{\partial c_g \partial c_k} \frac{1}{r_{kg}} \frac{\partial^2}{\partial c_g \partial a_k} \frac{1}{r_{gk}} \right] \\ \left. + \dot{F}_k^p \dot{G}_k^p \left[\frac{\partial^2}{\partial a_g \partial a_k} \frac{1}{r_{kg}} \frac{\partial^2}{\partial a_g \partial b_k} \frac{1}{r_{gk}} + \frac{\partial^2}{\partial b_g \partial a_k} \frac{1}{r_{kg}} \frac{\partial^2}{\partial b_g \partial b_k} \frac{1}{r_{gk}} + \frac{\partial^2}{\partial c_g \partial a_k} \frac{1}{r_{kg}} \frac{\partial^2}{\partial c_g \partial b_k} \frac{1}{r_{gk}} \right] \right\}$$

schreiben. Das Produkt dieses Ausdruckes (e) in den Faktor (d) stellt also die Kräftefunktion der gesuchten Kraft dar. Man bemerkt, daß diejenigen Glieder des Ausdruckes (e), die derselben Vertikalkolonne angehören, vollständige Quadrate von Trinomen darstellen, und daß diese Trinome wieder Ableitungen nach a_g, b_g und c_g eines und desselben Trinomes

$$\frac{1}{2} \left\{ \dot{H}_k \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{G}_k \frac{\partial}{\partial b_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{H}_k \frac{\partial}{\partial c_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right\}$$

sind. Die Kräftefunktion wird also mit der schon gefundenen (c) identisch, und es zeigt sich, daß diejenige Kraft, welche die Kugel k angreift, durch Ableitung nach a_k, b_k, c_k von derselben Funktion gefunden wird, deren Ableitungen nach a_g, b_g, c_g die Kraft gegen die Kugel g darstellen.

Auch in diesem Falle ist also die Wirkung der Gegenwirkung gleich, und beide Wirkungen lassen sich durch eine einzige Kräftefunktion darstellen.

208. Einfachste Formen der Kräftefunktionen und der Kraftkomponenten. — Wir haben also in den beiden betrachteten einfachen Fällen mit Kräften zu thun, die dem Gegenwirkungsprinzip gehorchen. Es genügt dann vollständig, die Wirkung der aktiven Kugel k gegen die ursprünglich neutrale Kugel g zu betrachten. Wir haben dann den schon vom rein hydrodynamischen Standpunkte aus diskutierten Fall der energetischen Kraft gegen eine dem oszillierenden Flüssigkeitsströme überlassene neutrale Kugel (134—136). Die Kräftefunktionen 205(c') und 207(c) sind die Ausdrücke der Energie τ des Stromfeldes, welches die aktive Kugel k umgibt, multipliziert mit $-\frac{3}{2} E_g$ und mit dem Koeffizienten der inducierten Konfliktgeschwindigkeit (135).

Wenn man das Parentheseglied in 205(c') ausführt, erhält man das Potential für die Wechselwirkung zwischen der pulsierenden und der neutralen Kugel in die Form

$$(a) \quad \Psi_{kg} = -\frac{3}{4} q \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2} q} E_g \cdot \left(\frac{\dot{E}_k}{4\pi r_{kg}^2} \right)^2.$$

Die Flächen $\Psi_{kg} = \text{const.}$ stellen konzentrische Kugeln um den Punkt k dar und fallen mit den isoenergetischen Flächen $\tau = \text{const.}$ zusammen. Die Kraft wird eine rein radiale Kraft, die den Wert

$$(b) \quad \frac{\partial \Psi_{kg}}{\partial r_{kg}} = 3 q \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2} q} E_g \frac{\dot{E}_k^2}{(4\pi)^2 r_{kg}^5}$$

hat. Das Vorzeichen hängt von der Differenz der Dichtigkeiten $q - Q_g$ ab. Die Formel enthält also das folgende Resultat:

Die temporäre Energiekraft, mit der eine pulsierende Kugel auf eine neutrale wirkt, und mit der die neutrale Kugel auf die pulsierende zurückwirkt, ist der reciproken fünften Potenz der Entfernung und dem Quadrat der Pulsationsintensität der pulsierenden Kugel proportional.

Die Kraft ist abstoßend, wenn die neutrale Kugel leichter, dagegen anziehend, wenn sie schwerer als die Flüssigkeit ist.

Das Resultat stimmt vollkommen mit dem in 136 gefundenen überein, wonach sich die leichte Kugel in der Richtung abnehmender, die schwere in der Richtung zunehmender Stromenergie bewegt.

Die Kräftefunktion 207 (c) für die temporäre Wirkung der oscillierenden Kugel nimmt ihre einfachste Form an, wenn wir das in der Parenthese vorkommende Quadrat der Geschwindigkeit aus dem in Polarkoordinaten ausgedrückten Geschwindigkeitspotential der Kugel k ableiten. Es ist dann

$$\varphi_k = - \frac{\dot{S}_k \cos \theta}{4\pi r^3},$$

wo \dot{S}_k das permanente Aktionsmoment der Kugel k mit den Komponenten \dot{F}_k^p , \dot{G}_k^p , \dot{H}_k^p ist. Es wird dann

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial r} = 2 \frac{\dot{S}_k \cos \theta}{4\pi r^3}, \quad \frac{\partial \varphi_k}{r \partial \theta} = \frac{\dot{S}_k \sin \theta}{4\pi r^3}.$$

Wenn wir quadrieren, addieren und eine einfache Reduktion ausführen, ergibt sich

$$\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_k}{r \partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\dot{S}_k}{4\pi r^3}\right)^2 (3 \cos^2 \theta + 1).$$

Führen wir dies anstatt des Klammerausdruckes in 207 (c) ein und indentifizieren r mit r_{kg} , so finden wir als einfachste Form der Kräftefunktion für die Wechselwirkung einer oscillierenden und einer neutralen Kugel:

$$(c) \quad \Psi_{kg} = - \frac{3}{4} q \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2} q} E_g \left(\frac{\dot{S}_k}{4\pi r_{kg}^3} \right)^2 (3 \cos^2 \theta + 1).$$

Wir betrachten den Punkt k als den Pol des benutzten polaren Koordinatensystems. $\Psi_{kg} = \text{const.}$ stellt dann eine Flächenschar dar, welche sich mit den isoenergetischen Flächen des der Kugel k zugehörigen Stromfeldes deckt. Diese Flächen haben also die Gleichung

$$(d) \quad r^6 = C(3 \cos^2 \theta + 1)$$

und können sehr angenähert als Umdrehungsellipsoide betrachtet werden, deren Umdrehungsachse mit der Oscillationsrichtung der Kugel k zusammenfällt, und sich wie $\sqrt[6]{4} : 1$ oder $1,26 : 1$ zur äquatorialen Achse verhält.

Die zu diesen Flächen senkrecht gerichtete Kraft, welche die Kugel k angreift, ist also nicht mehr eine reine Centralkraft. Doch sind die Abweichungen von der centralen Richtung nicht groß, so daß man im wesentlichen nur mit einer Anziehung oder mit einer Abstossung zu thun hat. Die radiale und die meridionale Kraftkomponente sind

$$\frac{\partial \Psi_{kg}}{\partial r_{kg}} = \frac{9}{2} q \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2} q} E_g \frac{\dot{S}_k^2}{(4\pi)^2 r_{kg}^7} (3 \cos^2 \theta + 1)$$

$$\frac{\partial \Psi_{kg}}{r_{kg} \partial \theta} = \frac{9}{2} q \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2} q} E_g \frac{\dot{S}_k^2}{(4\pi)^2 r_{kg}^7} \cos \theta \sin \theta.$$

Die Kraft nimmt also wie die umgekehrte siebente Potenz der Entfernung ab. Das Verhältniß der Meridiankomponente zu der radialen ist durch den Bruch

$$\frac{\cos \theta \sin \theta}{3 \cos^2 \theta + 1}$$

gegeben, welcher also die Tangente desjenigen Winkels darstellt, welchen die Resultantkraft mit der Verbindungslinie nach der anderen Kugel bildet. Das Maximum dieses Ablenkungswinkels tritt ein, wenn $\theta = 2$; seine Tangente beträgt dann nur $\frac{1}{4}$.

Die Wechselwirkung einer oscillierenden und einer neutralen Kugel wird also der Hauptsache nach durch den folgenden Satz beschrieben:

Die temporäre Energiekraft, mit der eine oscillierende Kugel auf eine neutrale wirkt, und mit der die neutrale Kugel zurückwirkt, ist im wesentlichen eine rein anziehende oder abstossende Kraft, deren Intensität der reciproken siebenten Potenz der Entfernung und dem Quadrat des Aktionsmomentes der oscillierenden Kugel proportional ist.

Die Kraft ist abstossend, wenn die neutrale Kugel leichter, anziehend, wenn sie schwerer als die Flüssigkeit ist.

209. Gleichzeitige permanente und temporäre Kräfte zwischen zwei pulsierenden Kugeln. — Oben haben wir immer die eine Kugel

als ursprünglich neutral betrachtet. Jede Kugel wird aber temporäre Schwingungen annehmen, ganz davon unabhängig, ob sie vorher permanente Pulsationen oder Oscillationen besitzt oder nicht. Die inducierten Oscillationen werden sich einfach den permanenten überlagern, und entsprechend wird sich die temporäre Kraft der permanenten superponieren.

So wird beispielsweise die Kräftefunktion der gleichzeitig wirkenden permanenten und temporären Kräfte zwischen zwei pulsierenden Kugeln g und k :

$$\Psi_{kg} = q \frac{\dot{E}_g \dot{E}_k}{4\pi r_{kg}} - \frac{3}{4} q \frac{q-Q_g}{Q+\frac{1}{2}q} E_g \left(\frac{\dot{E}_k}{4\pi r_{kg}^2} \right)^2 - \frac{3}{4} q \frac{q-Q_k}{Q+\frac{1}{2}q} E_k \left(\frac{\dot{E}_g}{4\pi r_{kg}^2} \right)^2.$$

Das erste Glied stellt hier die permanente Wechselwirkung der Kugeln dar, das zweite Glied die temporäre Wechselwirkung, insofern sie auf den Pulsationen der Kugel k und den inducierten Oscillationen der Kugel g beruht, das dritte Glied endlich stellt die temporäre Wechselwirkung dar, insofern sie auf den Pulsationen der Kugel g und den inducierten Oscillationen der Kugel k beruht.

Denken wir uns zur Vereinfachung, daß beide Kugeln gleiche Dichten, $Q_g = Q_k = Q$, und gleiche Volumina, $E_g = E_k = E$, haben, so reduziert sich Ψ_{kg} auf

$$\Psi_{kg} = q \frac{\dot{E}_g \dot{E}_k}{4\pi r_{kg}} - \frac{3}{4} q \frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q} E \frac{\dot{E}_k^2 + \dot{E}_g^2}{(4\pi r_{kg}^2)^2}.$$

Sind beide Kugeln gleich pulsierend und beide dichter als die Flüssigkeit, so wirken die permanente und die temporäre Kraft beide anziehend. Sind sie entgegengesetzt pulsierend und beide leichter als die Flüssigkeit, so wirken beide Kräfte abstoßend. Die infolge der Pulsationen wirkenden Kräfte werden dann von den temporären Kräften nur verstärkt. Das Entgegengesetzte wird dagegen der Fall sein, wenn die gleich pulsierenden Kugeln beide leichter, und die entgegengesetzt pulsierenden beide schwerer als die Flüssigkeit sind. Untersuchen wir, inwieweit dann die temporäre Kraft die permanente aufheben kann.

Der Ausdruck der Kraft wird:

$$\frac{\partial \Psi_{kg}}{\partial r_{kg}} = -q \frac{\dot{E}_g \dot{E}_k}{4\pi r_{kg}^2} + 3q \frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q} E \frac{\dot{E}_k^2 + \dot{E}_g^2}{(4\pi)^2 r_{kg}^5}.$$

Diese Kraft verschwindet, wenn

$$4\pi r_{kg}^3 \dot{E}_g \dot{E}_k = 3 \frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q} E (\dot{E}_k^2 + \dot{E}_g^2)$$

oder, wenn wir E durch $\frac{4}{3}\pi d^3$ ersetzen, und nach r_{kg} auflösen,

$$r_{kg} = 2d \sqrt[3]{\frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q} \frac{\dot{E}_k^2 + \dot{E}_g^2}{4\dot{E}_k \dot{E}_g}}.$$

Für die unendlich leichte Kugel wird

$$r_{kg} = 2d \sqrt[3]{\frac{\dot{E}_g^2 + \dot{E}_k^2}{2\dot{E}_g \dot{E}_k}},$$

und für die unendlich schwere Kugel

$$r_{kg} = 2d \sqrt[3]{\frac{\dot{E}_g^2 + \dot{E}_k^2}{4\dot{E}_g \dot{E}_k}}.$$

Man erkennt leicht, dass die Gröfsen unter dem Wurzelzeichen nur dann gröfser als 1, und folglich der Centralabstand der Kugeln gröfser als der kleinste mögliche Wert $2d$ sein kann, wenn \dot{E}_k und \dot{E}_g verschiedene Werte haben. Sind aber beide Kugeln gleich stark pulsierend, so wird die temporäre Kraft nicht die permanente überwinden können. Nimmt man aber \dot{E}_g und \dot{E}_k von einander verschieden an, so wird dasjenige r_{kg} , bei dem Gleichgewicht eintritt, beliebig grofs werden können. Bei Kugeln, die verschiedene Pulsationsintensitäten haben, wird man deshalb die folgenden Erscheinungen wahrnehmen können:

Schwere, entgegengesetzt pulsierende Kugeln stofsen einander in grofsen Abständen ab und ziehen einander in kleinen Abständen an. Bei einem gewissen, mittleren Abstand herrscht labiles Gleichgewicht.

Leichte, gleich pulsierende Kugeln ziehen einander in grofsen Abständen an und stofsen einander in kleinen Abständen ab. Bei einem gewissen, mittleren Abstand herrscht stabiles Gleichgewicht.

Analoge Resultate für leichte und schwere oscillierende Kugeln kann man auch ohne Schwierigkeit ableiten.

Zehnter Abschnitt.

Die nicht unabhängige Wirkung der hydrodynamischen Fernkräfte höherer Ordnung.

210. Zu den allgemeinen Eigenschaften der temporären Fernkräfte. — In den eben durchgeführten Beispielen von der temporären Wechselwirkung zwischen zwei Kugeln hat es sich gezeigt, daß das Gegenwirkungsprinzip gültig bleibt. Was im übrigen die allgemeinen Eigenschaften der temporären Energiekräfte betrifft, so war unser Beweis für die konservative Natur der hydrodynamischen Kräfte durchaus allgemeingültig, so daß diese Eigenschaft auch im besonderen den temporären Kräften oder überhaupt allen Kräften höherer Ordnung zukommt. Endlich folgt das Prinzip von der Unabhängigkeit der Kräfte von der progressiven sichtbaren Geschwindigkeit der Kugeln unmittelbar aus den in 137 angestellten Betrachtungen.

In einer Beziehung unterscheiden sich aber die Kräfte höherer Ordnung von denjenigen niederer Ordnung. Der Unterschied hat sich in den durchgeführten Beispielen noch nicht gezeigt, weil wir die Wirkung zwischen nur zwei Kugeln betrachtet haben; er wird aber sofort hervortreten, wenn wir die temporären Wirkungen zwischen mehr als zwei Kugeln untersuchen.

Wir wollen den Fall betrachten, daß eine neutrale Kugel g der Wirkung zweier entfernter, permanent pulsierender oder oszillierender Kugeln k und h ausgesetzt ist.

Die Kraft, welche die neutrale Kugel angreift, hat nach 160(e) die x -Komponente:

$$(a) \quad X = -q \left\{ \dot{\alpha}_\alpha \dot{F} + \dot{\alpha}_\beta \dot{G} + \dot{\alpha}_\gamma \dot{H} \right\},$$

wo (\dot{F} , \dot{G} , \dot{H}) das temporäre Aktionsmoment der Kugel g ist, und $\dot{\alpha}_\alpha$, $\dot{\alpha}_\beta$, $\dot{\alpha}_\gamma$ deformative Geschwindigkeiten des von den Kugeln k und h herrührenden permanenten Einfallstromes sind.

Wir können nun die Kraftkomponente (a) in formell genau derselben Weise zerlegen, wie wir in 168 die Komponenten der hydrodynamischen Fernkräfte niederer Ordnung zerlegten. Also

$$(b) \quad X = X_k + X_h,$$

wo

$$(c) \quad \begin{aligned} X_k &= -q \left\{ (\dot{\alpha}_\alpha)_k \dot{F} + (\dot{\alpha}_\beta)_k \dot{G} + (\dot{\alpha}_\gamma)_k \dot{H} \right\} \\ X_h &= -q \left\{ (\dot{\alpha}_\alpha)_h \dot{F} + (\dot{\alpha}_\beta)_h \dot{G} + (\dot{\alpha}_\gamma)_h \dot{H} \right\}, \end{aligned}$$

wo $(\dot{\alpha}_\alpha)_k$, $(\dot{\alpha}_\beta)_k$, $(\dot{\alpha}_\gamma)_k$ deformative Geschwindigkeiten des von der Kugel k , $(\dot{\alpha}_\alpha)_h$, $(\dot{\alpha}_\beta)_h$, $(\dot{\alpha}_\gamma)_h$ deformative Geschwindigkeiten des von der Kugel h herrührenden Partialstromes sind.

Nach Analogie von 168 können wir dann (X_k, Y_k, Z_k) als eine von der Kugel k , und (X_h, Y_h, Z_h) als eine von der Kugel h herrührende Fernkraft auffassen. Wir richten dann unsere Aufmerksamkeit auf die von der Kugel k herrührende Kraft (X_k, Y_k, Z_k) , und messen ihre Intensität, während wir gleichzeitig die Kugel h von Lage zu Lage verschieben: wir werden dann finden, daß die von der Kugel k ausgehende Kraft von der Lage der anderen Kugel h abhängig ist. Denn das Aktionsmoment $(\dot{F}, \dot{G}, \dot{H})$ der Kugel g , das in den Ausdruck der Kraft (X_k, Y_k, Z_k) eingeht, ist ein induciertes, als solches der Geschwindigkeit $(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$ des Einfallsstromes proportional, und dieser Einfallsstrom wird seine Intensität mit der Lage der Kugel h verändern. Es wird deshalb durch keinen Versuch gelingen, die Kräfte (X_k, Y_k, Z_k) und (X_h, Y_h, Z_h) voneinander zu isolieren und getrennt zu messen. Die Zerlegung (c) bleibt also eine willkürliche, rein mathematische, und die entsprechenden Kräfte (X_k, Y_k, Z_k) und (X_h, Y_h, Z_h) bleiben reine Rechengrößen, deren mathematische Bedeutung darin liegt, daß sie die Kraft (X, Y, Z) als Vektorsumme haben.

Wenn wir einmal die Kugel h und ein anderes Mal die Kugel k ins Unendliche entfernen, so werden X_k und X_h die Grenzwerte

$$(d) \quad \begin{aligned} X_{kk} &= -q \left\{ (\dot{\alpha}_\alpha)_k \dot{F}_k + (\dot{\alpha}_\beta)_k \dot{G}_k + (\dot{\alpha}_\gamma)_k \dot{H}_k \right\} \\ X_{hh} &= -q \left\{ (\dot{\alpha}_\alpha)_h \dot{F}_h + (\dot{\alpha}_\beta)_h \dot{G}_h + (\dot{\alpha}_\gamma)_h \dot{H}_h \right\} \end{aligned}$$

erhalten, wo $(\dot{F}_k, \dot{G}_k, \dot{H}_k)$ das von der Kugel k allein, und $(\dot{F}_h, \dot{G}_h, \dot{H}_h)$ das von der Kugel h allein herrührende Aktionsmoment ist.

Die durch (d) definierten Kräfte (X_{kk}, Y_{kk}, Z_{kk}) und (X_{hh}, Y_{hh}, Z_{hh}) sind also die Kräfte, welche die Kugeln k und h ausüben, wenn jede derselben allein vorhanden ist. Sie sind also voneinander isolierbar und getrennt meßbar, und man muß ihnen deshalb

dieselbe physikalische Realität als der Kraft (X, Y, Z) zuschreiben. Ihre Vektorsumme ist aber nicht gleich (X, Y, Z) .

Was wir hier für den Fall zweier wirkender Kugeln abgeleitet haben, wird sofort auf den Fall beliebig vieler wirkender Kugeln übertragen werden können. Selbst wenn es auch, wie wir später sehen werden, Fälle giebt, wo die temporären Kräfte wieder das einfache Verhalten der Kräfte niederer Ordnung zeigen, sind wir doch berechtigt, als Gegensatz zu dem Satze 168 über die Kräfte niederer Ordnung den folgenden Satz aufzustellen:

Für die hydrodynamischen Fernkräfte höherer Ordnungen ist das Prinzip von der ungestörten Superposition der Kräfte nicht allgemein gültig.

Der Inhalt des Satzes läßt sich auch so formulieren: die Resultantkraft ist im allgemeinen nicht die Vektorsumme derjenigen Einzelkräfte, welche jede Kugel ausübt, wenn sie allein vorhanden ist. Oder, für den Fall von zwei wirkenden Kugeln: das Prinzip von dem Parallelogramm der Kräfte ist für die hydrodynamischen Fernkräfte höherer Ordnung nicht allgemein gültig, wenn man unter den Komponenten diejenigen Kräfte versteht, welche jede Kugel ausübt, wenn sie allein vorhanden ist. Insofern versagt also der Satz von dem Parallelogramm der Kräfte als ein physikalisches Prinzip, wo man nur mit voneinander isolierbaren und getrennt meßbaren Kräften operiert. Das hat aber nichts mit der Gültigkeit dieses Satzes als mathematisches Prinzip zu thun: die Resultantkraft bleibt die Vektorsumme der beiden durch (c) definierten Kräfte; diese Kräfte sind aber nur mathematische Rechengrößen, physikalisch isolierbar und voneinander getrennt meßbar sind außer der Kraft (X, Y, Z) nur die Kräfte (X_{kk}, Y_{kk}, Z_{kk}) und (X_{hh}, Y_{hh}, Z_{hh}) .

211. Die Energie im Stromfelde zweier pulsierender Kugeln. —

Um die eigentümlichen Gesetze der Zusammensetzung der temporären Kräfte in einem konkreten Falle zu sehen, werden wir das möglichst einfache Beispiel ausarbeiten, nämlich dasjenige der Wirkung zweier pulsierender Kugeln k und h auf eine neutrale g .

Um die Kräftefunktion dieser Kraft zu bilden, wenden wir am einfachsten den Satz 135 über die Beziehung der Kräftefunktion zu der Energie des Einfallsstromes an. Das Potential des von den beiden pulsierenden Kugeln herrührenden Stromfeldes wird, wenn wir der Einfachheit halber von allen Reaktionspotentialen absehen:

$$(a) \quad \varphi = -\frac{E_k}{4\pi r_k} - \frac{E_h}{4\pi r_h}.$$

Die Geschwindigkeit, welche diese beiden Kugeln zusammen im Punkt g erzeugen, wird also die Komponenten

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\partial}{\partial a_g} \frac{\dot{E}_k}{4\pi r_{kg}} - \frac{\partial}{\partial a_g} \frac{\dot{E}_h}{4\pi r_{hg}} \\ (b) \quad \beta &= -\frac{\partial}{\partial b_g} \frac{\dot{E}_k}{4\pi r_{kg}} - \frac{\partial}{\partial b_g} \frac{\dot{E}_h}{4\pi r_{hg}} \\ \gamma &= -\frac{\partial}{\partial c_g} \frac{\dot{E}_k}{4\pi r_{kg}} - \frac{\partial}{\partial c_g} \frac{\dot{E}_h}{4\pi r_{hg}} \end{aligned}$$

haben. Hieraus ergibt sich als Ausdruck der Energie pro Volumeneinheit dieses Stromes:

$$\frac{1}{2} \eta \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial a_g} \frac{\dot{E}_k}{4\pi r_{kg}} + \frac{\partial}{\partial a_g} \frac{\dot{E}_h}{4\pi r_{hg}} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial b_g} \frac{\dot{E}_k}{4\pi r_{kg}} + \frac{\partial}{\partial b_g} \frac{\dot{E}_h}{4\pi r_{hg}} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial c_g} \frac{\dot{E}_k}{4\pi r_{kg}} + \frac{\partial}{\partial c_g} \frac{\dot{E}_h}{4\pi r_{hg}} \right)^2 \right\}.$$

Durch Ausführung der Differentiation und der Quadrate bringt man dies leicht auf die Form:

$$\frac{1}{2} \eta \left\{ \left(\frac{\dot{E}_k}{4\pi r_{kg}^2} \right)^2 + 2\dot{E}_k \dot{E}_h \frac{(\alpha_g - \alpha_k)(\alpha_g - \alpha_h) + (b_g - b_k)(b_g - b_h) + (c_g - c_k)(c_g - c_h)}{4\pi r_{kg}^2 4\pi r_{hg}^2} + \left(\frac{\dot{E}_h}{4\pi r_{hg}^2} \right)^2 \right\}.$$

Die Kräftefunktion, die man hieraus durch Multiplikation mit $-\frac{3}{2}E_g$ und mit dem Koeffizienten der induzierten Konfliktgeschwindigkeit bildet, ist nicht mehr, wie die entsprechende Kräftefunktion für permanente Kräfte, die Summe von zwei Gliedern, von denen das eine die Kraft von der einen und das andere die Kraft von der anderen wirkenden Kugel darstellt, sondern sie ist die Summe von drei Gliedern, deren eines, das ergänzende Glied, die Koordinaten beider Kugeln neben einander enthält, also auf dem gleichzeitigen Vorhandensein beider wirkender Kugeln beruht.

212. Einzelkräfte und ergänzende Kraft. — Wir geben deshalb jede künstliche Zerlegung der Kraft in zwei formell von den einzelnen Kugeln k und h herrührende Kräfte auf, und ziehen vor, die Gesamtkraft, der Form der Kräftefunktion entsprechend, durch drei Kräfte darzustellen.

Da die Ebene, welche die Mittelpunkte aller drei Kugeln enthält, eine Symmetrieebene ist, welche folglich auch die Kräfte enthält, brauchen wir nur die Verhältnisse in dieser Ebene zu studieren. Wählen wir sie als xy -Ebene, so wird $c_g = c_k = c_h = 0$, wodurch sich der gefundene Energieausdruck vereinfacht. Wenn wir nachher mit $-\frac{3}{2}E_g$ und mit dem Koeffizienten der induzierten Konflikt-

geschwindigkeit multiplicieren (135), so ergibt sich als Ausdruck Kräftefunktion:

$$(a) \quad \Psi = -\frac{3}{4} q \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2} q} E_g \left\{ \left(\frac{\dot{E}_k}{4\pi r_{kg}^2} \right)^2 + 2 \dot{E}_h \dot{E}_k \frac{(a_g - a_k)(a_g - a_h)(b_g - b_k)(b_g - b_h)}{4\pi r_{kg}^3 4\pi r_{hg}^3} + \left(\frac{\dot{E}_h}{4\pi r_{hg}^2} \right)^2 \right\}.$$

Die erste zu betrachtende Kraft ist die von der pulsierenden Kugel k allein ausgehende Kraft, die längs der Verbindungslinie r_{kg} gerichtet ist und durch Differentiation des ersten Gliedes von Ψ nach r_{kg} gefunden wird:

$$(b) \quad R_{kk} = 3 q \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2} q} E_g \frac{\dot{E}_k^2}{(4\pi)^2 r_{kg}^5}.$$

Die zweite Kraft ist die entsprechende von der pulsierenden Kugel h allein ausgehenden Kraft, welche längs der Verbindungslinie r_{hg} gerichtet ist, und aus dem letzten Glied von Ψ gefunden wird:

$$(c) \quad R_{hh} = 3 q \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2} q} E_g \frac{\dot{E}_h^2}{(4\pi)^2 r_{hg}^5}.$$

Schließlich giebt das mittlere Glied von Ψ die ergänzende Kraft, welche von dem gleichzeitigen Vorhandensein der Kugeln k und h abhängt, und deren Komponenten längs der Achsen x und y

$$3 q \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2} q} E_g \frac{\dot{E}_k \dot{E}_h}{(4\pi)^2 r_{kg}^3 r_{hg}^3} \left[3 \frac{(a_g - a_k)(a_g - a_h) + (b_g - b_k)(b_g - b_h)}{r_{kg} r_{hg}} - 1 \right] \left(a_g - \frac{a_k + a_h}{2} \right)$$

$$3 q \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2} q} E_g \frac{\dot{E}_k \dot{E}_h}{(4\pi)^2 r_{kg}^3 r_{hg}^3} \left[3 \frac{(a_g - a_k)(a_g - a_h) + (b_g - b_k)(b_g - b_h)}{r_{kg} r_{hg}} - 1 \right] \left(b_g - \frac{b_k + b_h}{2} \right)$$

sind. Die letzten Faktoren dieser Ausdrücke sind die Projektionen auf die Achsen von derjenigen Gerade ϱ , welche den Punkt g mit dem Mittelpunkt O von h und k verbindet (Figur 39). Die ergänzende Kraft ist also längs dieser Linie gerichtet. Bemerken wir weiter, daß die Klammerausdrücke die Bedeutung $3 \cos \chi - 1$ haben, wenn χ der zwischen r_{gh} und r_{gk} eingeschlossene Winkel ist, so wird der Ausdruck der ergänzenden Kraft

$$(d) \quad R_{kh} = 3 q \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2} q} E_g \frac{\dot{E}_h \dot{E}_k}{(4\pi)^2} \cdot \frac{q}{r_{hg}^3 r_{kg}^3} (3 \cos \chi - 1).$$

Diese ergänzende Kraft verschwindet in denjenigen Punkten des Feldes, wo

(e)

$$\cos \chi = \frac{1}{3},$$

das heisst in allen Punkten derjenigen Kreisbögen, von denen aus der Centralabstand r_{kh} der pulsierenden Kugeln unter einem Winkel gesehen wird, dessen Kosinus $\frac{1}{3}$ ist. Diese die Punkte g und h passierenden Kreisbögen sind in der Figur 39 voll ausgezogen. Innerhalb dieser Kreisbögen wird die ergänzende Kraft das eine, ausserhalb das andere, im übrigen auf dem Vorzeichen von \dot{E}_k und \dot{E}_h beruhende Vorzeichen haben.

213. Beispiele der Zusammensetzung temporärer Kräfte. — Hat die Kugel g ihren Mittelpunkt auf einem der voll ausgezogenen Kreisbögen der Figur 39, so wird die Resultantkraft in gewöhnlicher Weise nach dem Parallelogrammprinzip gefunden, durch Zusammensetzung derjenigen Kräfte R_{kc} und R_{hh} , welche die Kugeln k und h ausüben, wenn jede derselben allein vorhanden ist. In allen anderen Punkten des Feldes ist dagegen das Parallelogrammprinzip als ein physikalisches Prinzip nicht anwendbar.

Im Raume ausserhalb dieser Kreisbögen wird R_{kh} dasselbe Vorzeichen wie R_{kc} und R_{hh} haben, solange \dot{E}_k und \dot{E}_h gleiche Vorzeichen haben, und die Kugeln also gleich pulsierend sind. Die Kraft R_{kh} liegt dann so, wie sie in der Figur gezeichnet ist, nämlich in dem zwischen R_{kc} und R_{hh} eingeschlossenen Winkel, wo auch die nach dem Parallelogrammgesetze konstruierte Resultante dieser Kräfte liegen mufs. Eine schon durch qualitative Versuche hervortretende auffällige Abweichung von dem Parallelogrammgesetze wird dann nicht eintreten, wie grosse Unterschiede man auch durch messende Versuche finden mag.

Sind dagegen die Kugeln k und h entgegengesetzt pulsierend, so wird die ergänzende Kraft R_{kh} abstoßend sein, wenn R_{kc} und R_{hh} anziehend sind, und umgekehrt. Befindet sich dann die Kugel g in sehr grossem Abstände von h und k , so werden die Kräfte R_{kc} und R_{hh} einen verschwindend kleinen Winkel miteinander bilden. Die durch

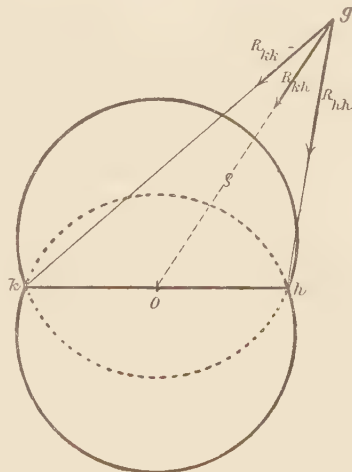


Fig. 39.

die Zusammensetzung aller drei Kräfte hervorgehende Kraft wird dann aus dem zwischen R_{kk} und R_{hh} eingeschlossenen Winkel heraus-treten. Richten wir also unsere Aufmerksamkeit nur auf die physikalisch definierbaren Kräfte, so finden wir das auffällige Resultat, daß zwei gleichgerichtete Kräfte sich zu einer damit nicht gleichgerichteten Resultanten zusammensetzen. Dies erklärt, warum die Kraft, welche eine oscillierende Kugel auf eine neutrale ausübt, nicht central ist (208), während doch die Kräfte gegen jede der beiden infinitesimalen Kugeln des äquivalenten pulsierenden Kugelpaares Centralkräfte sind.

Im Raume innerhalb der Kreisbögen wird man noch auffälligeren Erscheinungen begegnen. Hier wird R_{kh} das entgegengesetzte Vorzeichen von R_{hk} und R_{hh} haben, wenn \dot{E}_h und \dot{E}_k gleiches Vorzeichen haben, die Kugeln also gleich pulsierend sind. Untersuchen wir besonders, ob R_{kh} die Resultante von R_{hk} und R_{hh} entgegengesetzt gleich sein kann. Wenn dies eintreffen soll, muß zunächst die Resultante R_{hk} und R_{hh} längs der Linie g gerichtet sein. Dies erfordert, wie man an der Figur leicht sieht, daß

$$\frac{R_{kk}}{r_{kg}} = \frac{R_{hh}}{r_{hg}}.$$

Setzt man die Werte von R_{kk} und R_{hh} nach 212 (b) und (c) ein, so ergibt sich, daß dies in denjenigen Punkten des Feldes eintreten wird, wo die Abstände des Punktes g von den Punkten h und k die Bedingung

$$(a) \quad \frac{\dot{E}_k}{r_{k,g}^3} = \frac{\dot{E}_h}{r_{h,g}^3}$$

erfüllen. Weiter ist der absolute Wert der nach dem Parallelogrammgesetze gebildeten Resultante von R_{hk} und R_{hh} die Quadratwurzel von

$$R_{kk}^2 + R_{hh}^2 + 2 R_{kk} R_{hh} \cos \chi.$$

Durch Einsetzen der Werte von R_{kk} und R_{hh} ergibt sich

$$\left\{ 3 q \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2} q} \frac{E_g}{(4\pi)^2} \right\}^2 \left| \frac{\dot{E}_k^4}{r_{kg}^{10}} + \frac{\dot{E}_h^4}{r_{hg}^{10}} + 2 \frac{E_k^2 E_h^2}{r_{kg}^5 r_{hg}^5} \cos \chi \right\}.$$

In denjenigen Punkten des Feldes, wo die Relation (a) erfüllt ist, läßt sich dieser Ausdruck in der Form

$$\left(3 q \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2} q} E_g \frac{\dot{E}_k \dot{E}_h}{(4\pi)^2 r_{kg}^3 r_{hg}^3} \right)^2 (r_{kg}^2 + r_{hg}^2 + 2 r_{kg} r_{hg} \cos \chi)$$

schreiben. Die Wurzel der in den letzten Parenthesen enthaltenen GröÙe ist aber einfach das Doppelte des Abstandes q des Punktes g von dem Mittelpunkte zwischen k und h , wie man wieder leicht aus der Figur ersieht. Der gesuchte absolute Wert der Resultante von R_{kk} und R_{hh} reduciert sich also auf

$$(b) \quad 6q \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2}q} E_g \frac{\dot{E}_k \dot{E}_h}{(4\pi)^2 r_{kg}^3 r_{hg}^3}.$$

Dieser Ausdruck ist R_{kh} entgegengesetzt gleich, wenn $3 \cos \chi - 1$ den Wert 2 hat, oder

$$(c) \quad \cos \chi = -\frac{1}{3}.$$

Diese Bedingung ist in den Punkten der punktierten Kreisbögen erfüllt, welche die früher voll ausgezogenen Kreisbögen zu vollständigen Kreisen ergänzen. Wir finden also das folgende Resultat:

In denjenigen zwei Punkten der punktierten Kreisbögen, wo die Abstände von den Punkten k und h die Relation (a) erfüllen, wird die Kugel g im Gleichgewicht sein. Wenn die Pulsationsintensitäten \dot{E}_k und \dot{E}_h gleich sind, werden diese Gleichgewichtspunkte die Schnittpunkte dieser Kreisbögen mit der durch O gelegten Senkrechten zu der Centrallinie r_{kh} der pulsierenden Kugeln sein. Der

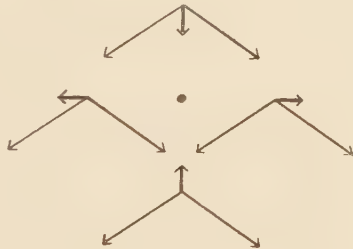


Fig. 40.

Einfachheit halber nehmen wir im folgenden diese Gleichheit der Pulsationsintensitäten an. Setzen wir die ergänzende Kraft R_{kh} außer Betracht und nehmen nur auf die physikalisch isolierbaren Kräfte R_{kk} und R_{hh} Rücksicht, so erhalten wir das Resultat, daß zwei Kräfte, welche nicht entgegengesetzt gleich sind, einander Gleichgewicht halten. In der Nähe dieses Gleichgewichtspunktes wird die Kraft, welche thatsächlich die Kugel g angreift, jeden beliebigen Winkel mit der Parallelogrammresultante der Kräfte R_{kk} und R_{hh} bilden können. Ist beispielsweise die Kugel g schwerer als die Flüssigkeit, so daß die Kräfte R_{kk} und R_{hh} anziehend sind, so wird die totale Kraft etwas außerhalb der neutralen Punkte dieselbe Richtung, obgleich eine viel geringere Intensität haben als die Parallelogrammresultante von R_{kk} und R_{hh} ; etwas innerhalb wird sie die entgegengesetzte Richtung wie die Parallelogrammresultante

haben; etwas rechts oder links von dem neutralen Punkte wird sie auf der Parallelogrammresultante senkrecht stehen (Figur 40). Ist die Kugel g leichter als die Flüssigkeit, so braucht man nur allen Pfeilen der Figur 40 die entgegengesetzte Richtung zu geben.

In dem Raume innerhalb der beiden punktierten Kreisbögen wird man deshalb der folgenden auffälligen Erscheinung begegnen: Eine Kugel, die leichter als die Flüssigkeit ist, und die deshalb von jeder der pulsierenden Kugeln allein abgestoßen wird, wird von beiden Kugeln zusammen gegen den Punkt O hin angezogen, und befindet sich dort in stabilem Gleichgewichte. Eine schwere Kugel dagegen, welche von jeder Kugel allein angezogen wird, wird im Punkte O instabiles Gleichgewicht haben. Hat sie nur Freiheit, sich auf der Senkrechten durch O zu bewegen, so wird sie nach dem neutralen Punkte auf einem der punktierten Kreisbögen hingetrieben und wird sich dort in stabilem Gleichgewichte befinden.

Das hier durchgeführte Beispiel, welches leicht durch ähnliche ergänzt werden kann, genügt, um zu zeigen, wie weit sich die temporären Fernkräfte von den früher untersuchten Kräften niederer Ordnung in Bezug auf die Gesetze der Zusammensetzung unterscheiden: die temporäre Kraft, welche Kugeln zusammen ausüben, kann in Bezug auf Intensität und Richtung beliebig viel von der Vektorsumme derjenigen Kräfte abweichen, welche jede Kugel ausübt, wenn sie allein vorhanden ist.

Dieses komplizierte Verhalten der temporären hydrodynamischen Fernkräfte ist ein deutliches Zeugnis, daß wir uns der Grenze nähern, wo die künstlich eingeführte Vorstellung von den hydrodynamischen Fernkräften aufhört, eine einfache und natürliche Vorstellung zu sein. Im Falle der Kräfte niederer Ordnung war sie durchaus einfach. Jetzt ist aber die hydrodynamische Form des Gesetzes, wonach sich die neutrale Kugel in der Richtung zunehmender oder abnehmender Stromenergie bewegt, entschieden einfacher als die Vorstellung von Fernkräften, die nicht voneinander unabhängig wirken.

Elfter Abschnitt.

Hydrodynamische Fernkräfte höherer Ordnung. Temporäre Wechselwirkungen zwischen neutralen Kugeln in permanent-oscillierendem Strome.

214. Zwei neutrale Kugeln in einem Parallelstrome. — Da das Prinzip von der ungestörten Superposition nicht mehr für die hydrodynamischen Fernkräfte höherer Ordnung allgemeine Gültigkeit hat, so verdienen die Ausnahmefälle, wo es sich gültig zeigt um so größere Aufmerksamkeit. Ein solcher Fall tritt ein für die Wechselwirkung zwischen mehreren neutralen Kugeln, die in demselben, von entfernten permanent-pulsierenden oder oscillierenden Kugeln herführenden Strome schwimmen.

Wenn die letzteren Kugeln hinlänglich weit entfernt sind, können wir den permanent-oscillierenden Strom, als einen Parallelstrom mit der Geschwindigkeit $(\dot{\alpha}_p, \dot{\beta}_p, \dot{\gamma}_p)$ betrachten. Die beiden neutralen Kugeln g und k werden inducierte Oscillationen annehmen mit den Aktionsmomenten $(\dot{F}_g^t, \dot{G}_g^t, \dot{H}_g^t)$ und $(\dot{F}_k^t, \dot{G}_k^t, \dot{H}_k^t)$, und infolgedessen Ströme erzeugen, die sich über den Parallelstrom lagern und die die Potentiale

$$\begin{aligned} \varphi_g &= - \left\{ \dot{F}_g^t \frac{\partial}{\partial a_g} \frac{1}{4\pi r_g} + \dot{G}_g^t \frac{\partial}{\partial b_g} \frac{1}{4\pi r_g} + \dot{H}_g^t \frac{\partial}{\partial c_g} \frac{1}{4\pi r_g} \right\} \\ \varphi_k &= - \left\{ \dot{F}_k^t \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{4\pi r_k} + \dot{G}_k^t \frac{\partial}{\partial b_k} \frac{1}{4\pi r_k} + \dot{H}_k^t \frac{\partial}{\partial c_k} \frac{1}{4\pi r_k} \right\} \end{aligned} \quad (a)$$

haben, wo die Aktionsmomente durch

$$\begin{aligned} \dot{F}_g^t &= \frac{3}{2} \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2}q} E_g \dot{\alpha}_p & \dot{F}_k^t &= \frac{3}{2} \frac{q - Q_k}{Q_k + \frac{1}{2}q} E_k \dot{\alpha}_p \\ \dot{G}_g^t &= \frac{3}{2} \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2}q} E_g \dot{\beta}_p & \dot{G}_k^t &= \frac{3}{2} \frac{q - Q_k}{Q_k + \frac{1}{2}q} E_k \dot{\beta}_p \\ \dot{H}_g^t &= \frac{3}{2} \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2}q} E_g \dot{\gamma}_p & \dot{H}_k^t &= \frac{3}{2} \frac{q - Q_k}{Q_k + \frac{1}{2}q} E_k \dot{\gamma}_p \end{aligned} \quad (b)$$

gegeben sind.

Die Kugel g wird jetzt eine Kraft erleiden, welche die x -Komponente

$$(c) \quad X_g = -q \left\{ \dot{\alpha}_a \dot{F}_g^t + \dot{\alpha}_\beta \dot{G}_g^t + \dot{\alpha}_\gamma \dot{H}_g^t \right\}$$

hat. Die hier auftretenden deformativen Geschwindigkeiten $\dot{\alpha}_a, \dot{\alpha}_\beta, \dot{\alpha}_\gamma$ lassen sich als die partiellen Ableitungen nach a_g von den Geschwindigkeitskomponenten $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ des Einfallsstromes darstellen, in dem sich die Kugel g befindet. Da zugleich die Größen $\dot{F}_g^t, \dot{G}_g^t, \dot{H}_g^t$, wie die Formeln (b) zeigen, von a_g, b_g, c_g unabhängig sind, können wir X_g in der Form:

$$X_g = -q \frac{\partial}{\partial a_g} \left\{ \dot{\alpha} \dot{F}_g^t + \dot{\beta} \dot{G}_g^t + \dot{\gamma} \dot{H}_g^t \right\}$$

schreiben. Die Kraft, welche die Kugel g angreift, läßt sich also durch die Kräftefunktion:

$$(d) \quad \Psi_{kg} = -q \left\{ \dot{\alpha} \dot{F}_g^t + \dot{\beta} \dot{G}_g^t + \dot{\gamma} \dot{H}_g^t \right\}$$

darstellen.

Die hier auftretenden Geschwindigkeitskomponenten $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ sind die Summen der im ganzen Felde konstanten Geschwindigkeitskomponenten $\dot{\alpha}_p, \dot{\beta}_p, \dot{\gamma}_p$ des permanenten Parallelstromes und der temporären Geschwindigkeitskomponenten $\dot{\alpha}_t, \dot{\beta}_t, \dot{\gamma}_t$, welche die Kugel k im Punkt g erzeugt. Nur die letztere Geschwindigkeit ist von Punkt zu Punkt veränderlich, so daß sie im Ausdruck (d) von Bedeutung ist. Drücken wir diese Geschwindigkeit durch die Ableitungen von φ_k nach a_g, b_g, c_g aus, so ergibt sich für die Kräftefunktion:

$$(e) \quad \begin{aligned} \Psi_{kg} = q \left\{ \dot{F}_g^t \frac{\partial}{\partial a_g} \left[\dot{F}_k^t \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{G}_k^t \frac{\partial}{\partial b_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{H}_k^t \frac{\partial}{\partial c_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right] \right. \\ + \dot{G}_g^t \frac{\partial}{\partial b_g} \left[\dot{F}_k^t \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{G}_k^t \frac{\partial}{\partial b_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{H}_k^t \frac{\partial}{\partial c_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right] \\ \left. + \dot{H}_g^t \frac{\partial}{\partial c_g} \left[\dot{F}_k^t \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{G}_k^t \frac{\partial}{\partial b_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{H}_k^t \frac{\partial}{\partial c_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Diese Kräftefunktion hat also genau dieselbe Form, wie die Kräftefunktion 199(d') für die Wechselwirkung zweier permanent oszillierender Kugeln, nur daß man sich immer der Relationen (b) erinnern muß, nach denen die Aktionsmomente durch die Geschwindigkeit des permanenten Parallelstromes gegeben sind.

Bringen wir die Kräftefunktion auf die trigonometrische Form 199(e), so ist wegen des Parallelismus der Aktionsmomente $\cos \theta = 0$ und $\cos \theta_g = -\cos \theta_k$, das letztere unter der Voraussetzung, daß die Aktionsmomente \dot{S}_g und \dot{S}_k als positive und negative Größen auf-

gefaßt werden. Bezeichnen wir durch $\vartheta = \theta_k = \pi - \theta_g$ den Winkel, welchen die Verbindungslinie r_{kg} der Kugeln mit der Richtung des Parallelstromes, oder der damit identischen Richtung der Aktionsmomente der Kugeln bildet, so wird die Kräftefunktion

$$(f) \quad \Psi_{kg} = -q \dot{S}_g^t \dot{S}_k^t \frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{4 \pi r_{kg}^3}.$$

\dot{S}_g^t und \dot{S}_k^t sind hier Vektorgroßen mit den Komponenten (b), also die temporären Aktionsmomente, die, wenn wir durch $\dot{\sigma}_p$ die Resultantengeschwindigkeit im permanenten Parallelfelde bezeichnen, die Form annehmen:

$$(g) \quad \dot{S}_g^t = \frac{3}{2} \frac{q - Q_g}{Q_g + \frac{1}{2} q} E_g \dot{\sigma}_p, \quad \dot{S}_k^t = \frac{3}{2} \frac{q - Q_k}{Q_k + \frac{1}{2} q} E_k \dot{\sigma}_p.$$

Durch Einsetzen dieser Werte ergibt sich also schliesslich

$$(h) \quad \Psi_{kg} = -\left(\frac{3}{2} \dot{\sigma}_p\right)^2 q \frac{(q - Q_g)(q - Q_k)}{(Q_g + \frac{1}{2} q)(Q_k + \frac{1}{2} q)} E_g E_k \frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{4 \pi r_{kg}^3}$$

215. Die Wechselwirkung der beiden Kugeln. — Die Kräfte, welche die beiden Kugeln aufeinander ausüben, lassen sich durch eine radiale, rein anziehende oder abstossende Kraft

$$\frac{\partial \Psi_{kg}}{\partial r_{kg}} = 3 \left(\frac{3}{2} \dot{\sigma}_p\right)^2 q \frac{(q - Q_g)(q - Q_k)}{(Q_g + \frac{1}{2} q)(Q_k + \frac{1}{2} q)} E_g E_k \frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{4 \pi r_{kg}^4},$$

und ein Drehungsmoment darstellen, welches auf die Richtung der Verbindungslinie r_{kg} verändernd wirkt:

$$\frac{\partial \Psi_{kg}}{\partial \vartheta} = 3 \left(\frac{3}{2} \dot{\sigma}_p\right)^2 q \frac{(q - Q_g)(q - Q_k)}{(Q_g + \frac{1}{2} q)(Q_k + \frac{1}{2} q)} E_g E_k \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{4 \pi r_{kg}^3}.$$

Die Kraftrichtungen hängen teils von dem Winkel ϑ , also der Richtung der Verbindungslinie der Kugeln relativ zur Richtung des Parallelstromes, teils von dem Faktor $(q - Q_g)(q - Q_k)$ ab. Diese GröÙe ist positiv, wenn entweder beide Kugeln dichter, oder beide Kugeln weniger dicht als die Flüssigkeit sind, negativ, wenn die eine Kugel dichter, die andere weniger dicht als die Flüssigkeit ist.

Sind beide Kugeln schwerer oder beide leichter als die Flüssigkeit, so ist die radiale Kraft positiv oder abstossend, solange der numerische Wert von $\cos \vartheta$ kleiner als $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ist, und sonst negativ oder anziehend. Die Kugeln werden also einander abstossen, wenn

sie sich auf derselben Stromlinie des Parallelfeldes befinden, dagegen anziehen, wenn sie sich in einer zu den Stromlinien senkrechten Ebene befinden. In diesen beiden Lagen der größten Anziehung oder Abstofung ist das Drehungsmoment Null, in allen anderen Lagen aber von Null verschieden und so gerichtet, daß die Verbindungslinie der Kugeln sich senkrecht zu den Stromlinien des Feldes einzustellen sucht. Befinden sich die Kugeln also ursprünglich sehr nahe auf derselben Stromlinie, so werden sie sich erst voneinander entfernen, während gleichzeitig ihre Verbindungslinie sich so dreht, daß der Winkel, den sie mit den Stromlinien des Feldes bildet, wächst. Wenn dieser Winkel den Wert von etwa 55° überschritten hat, wo $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, tritt Anziehung ein, die ihren größten Wert erreicht, wenn die Verbindungslinie senkrecht zu den Stromlinien des Parallelfeldes ist. Sofern die Drehung sich nicht wegen der Trägheit über die Gleichgewichtslage hinaus fortsetzt, wird von jetzt an nur eine Annäherung der Kugeln gegeneinander stattfinden.

Ist die eine Kugel schwerer, die andere leichter als die Flüssigkeit, so haben die Kräfte entgegengesetztes Vorzeichen: die Kugeln stoßen einander ab, wenn sie sich in derselben Ebene senkrecht zu den Stromlinien befinden, die Verbindungslinie sucht sich dem Parallelismus mit den Stromlinien zu nähern. Wenn der Winkel θ auf 55° vermindert ist, tritt Abziehung ein, welche am stärksten wird, wenn der Parallelismus der Verbindungslinie mit den Stromlinien erreicht ist.

216. Ein System von beliebig vielen neutralen Kugeln gleicher Größe und Dichte im oscillierenden Strome. — In dem hier betrachteten Falle, wo die inducierten Schwingungen der beiden Kugeln eine gemeinschaftliche Ursache haben, während die gegenseitigen Induktionen unter den Kugeln außer Betracht gesetzt werden können, lassen sich die Wirkungen beliebig vieler Kugeln ohne weiteres superponieren. Die Kräftefunktion für sämtliche Wechselwirkungen erhält man einfach, wenn man die Kräftefunktionen der Form 214(f) oder (h) nach g und k summiert, unter der gewöhnlichen Voraussetzung, daß immer g und k voneinander verschieden sind. Nur die Wechselwirkungen mit denjenigen entfernten pulsierenden oder oscillierenden Kugeln, welche den vorausgesetzten permanenten Strom erzeugen, lassen sich einander nicht ungestört superponieren. Von diesen Kräften sehen wir aber vorläufig ab, indem wir den

permanent-oscillierenden Strom der Einfachheit halber als Parallelstrom betrachten.

Die Bewegungen eines Systems von neutralen Kugeln in einem beliebigen oscillierenden Strome lassen sich danach in den allgemeinen Zügen leicht überblicken. Wir denken uns zur Vereinfachung, daß sämtliche Kugeln untereinander identisch sind, so daß alle Volumina, $E_k = E_g = E$, und alle Dichtigkeiten, $Q_k = Q_g = Q$, gleich sind.

Die Kräftefunktion für die Wechselwirkungen unter den neutralen Kugeln nimmt dann die einfache Form

$$\psi = -\frac{1}{2} q \sum_{k \geq g} \sum_g \left(\frac{3}{2} \frac{q - Q}{Q + \frac{1}{2} q} E \dot{\sigma}_p \right)^2 \frac{3 \cos^2 \vartheta_{kg} - 1}{4 \pi r_{kg}^3}$$

an, wo $\dot{\sigma}_p$ die Geschwindigkeit des Parallelstromes ist, und ϑ_{kg} der Winkel, welchen die Verbindungslinie zweier Kugeln k und g mit $\dot{\sigma}_p$ bildet. Ist der Strom nicht mehr ein Parallelstrom, sondern ein beliebiger Strom potentieller Natur, so bleibt die Kräftefunktion ψ für jede beliebige Gruppe von Kugeln verwendbar, welche innerhalb eines Stromgebietes liegt, wo $\dot{\sigma}_p$ nur kleine Veränderungen an Größe und Richtung erleidet.

Sind die Kugeln im Anfange ganz regellos verteilt, so werden die Oscillationen des Stromes ordnend auf die räumliche Verteilung der Kugeln wirken: Kugeln, welche auf derselben Stromlinie liegen, werden sich voneinander entfernen, Kugeln, welche in einer zu den Stromlinien normalen Fläche liegen, suchen sich einander zu nähern. Die Verbindungslinien aller Kugeln suchen sich gegen die zu den Stromlinien senkrechte Lage hin zu drehen. Da das Drehungsmoment proportional der umgekehrten dritten Potenz der Entfernung ist, wird sich dasselbe für die sich verlängernden Verbindungslinien, welche den Stromlinien angenähert parallel sind, nicht stark geltend machen, aber gleichzeitig um so stärker für diejenige Verbindungslinie, welche sich verkürzen und sich der zu den Stromlinien senkrechten Lage nähern. Die Folge wird sein, daß sich die Kugeln nach kurzer Zeit auf Flächen einstellen, die normal zu den Stromlinien des Feldes sind. Diese Ordnung ist eine stabile, denn das Drehungsmoment verhindert die Kugeln, welche einmal in eine solche Fläche gelangt sind, sich von derselben wieder zu entfernen; und gleichzeitig werden die einzelnen Flächen sich voneinander getrennt halten wegen der gegenseitigen Abstofsung. Wo sich die Flächen sonst bilden werden, wird von Zufälligkeiten in der ursprünglichen

Verteilung der Kugeln abhängen: diejenigen Stellen des Feldes, wo die Abstände und gegenseitigen Lagen der Kugeln die schnelle Bildung eines Elementes einer Fläche begünstigen, werden Ausgangspunkte der Bildung vollständiger Flächen bilden.

Ziehen wir schliesslich zugleich diejenige Kraft in Betracht, die jede Kugel in der Richtung zunehmender oder abnehmender Feldenergie zu treiben sucht, so ergibt sich, dass die auf Äquipotentialflächen des Stromes geordneten Kugeln sich in der Richtung zunehmender Feldenergie bewegen werden, wenn alle Kugeln schwerer als die Flüssigkeit sind, in der Richtung abnehmender Feldenergie dagegen, wenn alle Kugeln leichter als die Flüssigkeit sind. Rührt beispielsweise der permanente Strom von einer pulsierenden Kugel her, so werden sich die neutralen Kugeln auf Kugelflächen einstellen, welche mit der pulsierenden Kugel konzentrisch sind; und diese Kugelflächen werden sich verengern oder erweitern, je nachdem die Kugeln schwerer oder leichter als die Flüssigkeit sind.

217. Analogie der temporären hydrodynamischen Fernkräfte mit den temporären elektrischen und magnetischen Fernkräften. — Es muß sofort auffallen, dass die in den letzten drei Abschnitten beschriebenen Erscheinungen eine Erweiterung der im Fall der permanenten hydrodynamischen Fernkräfte aufgetretenen Analogie mit elektrischen und magnetischen Fernkräften bilden. Die ursprünglich neutralen Kugeln, die von selbst keine Fernwirkungen ausüben, werden von den permanent-pulsierenden oder oscillierenden Kugeln in inducierte Oscillationen versetzt und erhalten dadurch dieselbe Fähigkeit wie die permanent-oscillierenden Kugeln, den magnetischen ähnliche Fernwirkungen auszuüben.

Dabei tritt, genau wie im Magnetismus, ein auf den stofflichen Eigenschaften des neutralen Körpers beruhende verschiedene Polarität ein: die leichte Kugel, die schneller als der umgebende Strom schwingt, erhält ein positives Aktionsmoment, welches dem positiven magnetischen Momente der ferromagnetischen Körper entspricht. Die schwere Kugel, die langsamer als der Strom schwingt, und die deshalb relativ betrachtet gegen den Strom schwingt, erhält ein negatives Aktionsmoment, welches dem negativen magnetischen Momente der diamagnetischen Körper entspricht. Infolge der verkehrten Polgesetze wird dann die leichte Kugel von der permanent-pulsierenden oder oscillierenden Kugel abgestoßen und die schwere angezogen. Infolge desselben verkehrten Polgesetzes wird ein System von neutralen Kugeln sich auf Äquipotentialflächen des Feldes ordnen,

während die magnetischen neutralen Körper sich längs der Vektorlinien des Feldes einstellen, wie der bekannte Versuch mit Eisenfeilspänen zeigt.

Den Vergleich mit magnetischen Erscheinungen können wir deshalb fortwährend benutzen, um die eintretenden Fernwirkungen bequem überblicken zu können. Beide Regeln 202 (A) und (B) behalten ihre Brauchbarkeit, nur daß die in (A) enthaltene Definition der magnetischen Achse und der Pole der oscillierenden Kugel in folgender Weise vervollständigt werden muss, um zugleich den Fall der temporär-inducierten Oscillationen umfassen zu können:

Zu der gewählten Anfangszeit beobachtet man die Bewegung der oscillierenden Kugeln relativ zu dem Einfallstrom, und nennt den in dieser relativen Bewegung vorausgehenden Pol der Kugel ihren Nordpol, den nachfolgenden ihren Südpol.

Diese Definition ist gleich brauchbar, sei es, daß die Oscillationen der Kugel permanent, temporär oder zusammengesetzt permanent und temporär sind. Verwendet man diese Regel zur Benennung der Pole der oscillierenden Kugel und hält im übrigen die Definition (A) für den Fall der pulsierenden Kugel und die Regel (B) über das verkehrte Polgesetz fest, so leitet man leicht alle qualitativen Ergebnisse unserer obigen Untersuchungen über die temporären hydrodynamischen Fernkräfte ab. Daß sich die Analogie auch in Bezug auf die quantitativen Verhältnisse bewährt, werden wir später nachweisen. Nur soviel sei schon jetzt erwähnt, daß wieder die Benutzung der HAEVISIDE'schen Einheiten für die elektrischen und magnetischen Größen die Vollständigkeit der Analogie am einfachsten hervortreten lässt.

218. Schlussbetrachtungen über die hydrodynamischen Fernkräfte. — Die Aufgabe, die wir uns mit der Untersuchung der Eigenschaften der hydrodynamischen Fernkräfte gestellt haben, betrachten wir jetzt als erledigt. Einerseits haben wir unsere Untersuchungen fortgesetzt bis zu der Grenze, wo die Brauchbarkeit unserer fundamentalen Kraftformeln 87(a) aufhört. Andererseits haben wir aber auch schon die Grenze erreicht, wo die Vorstellung der hydrodynamischen Fernkraft aufhört einfach und handlich zu sein, wie die komplizierten Gesetze der Zusammensetzung der temporären Fernkräfte gezeigt haben. Allerdings wird man keinen principiellen Schwierigkeiten begegnen, wenn man die Formeln 87(a) vervollständigen und die Untersuchungen fortsetzen will. Aber die Arbeit

wird in mathematischer Beziehung immer beschwerlicher werden, und die Resultate werden immer mehr an Einfachheit verlieren.

Eine solche weitere Fortsetzung der Untersuchungen werden wir deshalb nicht vornehmen. Dagegen verdient eine Erscheinung eine genauere Untersuchung, nämlich die auffällige Analogie mit elektrischen und magnetischen Fernkräften. Von dem einen Unterschied, dem Vorzeichen der Kräfte, abgesehen, ist diese Analogie vollständig, und zeigt sich auch besonders darin, daß man bei der fortgesetzten Untersuchung der Fernkräfte beider Arten zuletzt zu einem Punkte kommt, wo die Fernwirkungsvorstellung sich als künstlich und schwer zu handhaben erweist. In der Hydrodynamik war dies vorauszusehen; denn die Fernwirkungsvorstellung ist hier als eine künstliche Vorstellung eingeführt, und man kann von dieser Vorstellung wieder zu der unmittelbaren Betrachtung des Stromfeldes und des Flüssigkeitsdruckes zurückkehren. In der Elektrizitätslehre hat andererseits die Erkenntnis der komplizierten Natur der Fernkräfte zu der Überzeugung geführt, daß dieselben nicht mehr als Fundamentalvorstellungen brauchbar sind; man hat versucht sie zu eliminieren und als neue Fundamentalvorstellung diejenige der elektrischen und magnetischen Felder einzuführen. Eine nahe liegende Frage wird dann diese:

Wie verhalten sich die elektrischen und die magnetischen Felder, die man als Ursachen hinter die elektrischen und magnetischen Fernwirkungen zu schieben versucht hat, zu den hydrodynamischen Stromfeldern, die die Ursachen der hydrodynamischen Fernkräfte sind?

Daß auch diese beiden Klassen von Feldern mehr oder weniger ausgedehnte Analogien miteinander haben, ist schon längst bekannt. Solche Analogien sind auch von Anfang an in unseren Untersuchungen hervorgetreten. Die Figuren, die wir in dem kinematischen Teil unserer Untersuchungen zur Darstellung von hydrodynamischen Stromfeldern gezeichnet haben, können alle ebensogut als Darstellungen elektrischer oder magnetischer Kraftfelder betrachtet werden. Tiefer liegenden Analogien derselben Natur sind wir in den Abschnitten über die hydrodynamische Selbstinduktion und die hydrodynamische Fremdinduktion begegnet. Daß bruchstückweise solche Analogien vorliegen, ist deshalb schon eine Thatsache. Die große Frage ist aber, ob es nur vereinzelte Bruchstücke sind, oder ob sie sich zu einem organischen Ganzen miteinander und mit den zugehörigen Fernkräften zusammenfügen.

Wie es sich mit dieser Frage verhält, werden wir deshalb noch zu untersuchen haben. Ehe wir aber diese Aufgabe angreifen, wird

es zweckmäßig sein, daß wir in noch konkreterer Form, nämlich durch das Experiment, mit den hydrodynamischen Erscheinungen, welche unseren Gegenstand bilden, vertraut werden. Wir werden daher im nächsten Band die experimentellen Untersuchungen der hydrodynamischen Fernkräfte und der hydrodynamischen Stromfelder darstellen, und dann die Frage von der Analogie dieser Erscheinungen mit den elektrischen und magnetischen untersuchen.

Zwölfter Abschnitt.

Zur geschichtlichen Entwicklung der Theorie der hydrodynamischen Fernkräfte.

219. Frühere Zerlegung der hydrodynamischen Fernkräfte. — Wir werden zuletzt noch einige Erläuterungen über die geschichtliche Entwicklung der Theorie der hydrodynamischen Fernkräfte geben, und zwar um so eher, als wir dadurch Gelegenheit finden werden, noch einmal auf den wichtigsten Punkt in der Darstellung der ganzen Theorie zurückzukommen.

Wie in dem ersten Abschnitte dieses Teiles erwähnt, hatte C. A. BJERKNES im Jahre 1868 seine ersten allgemeinen Resultate über die Eigenschaften der hydrodynamischen Fernkräfte, doch ohne die Ableitungen zu geben, publiciert (S. 235). Diese Resultate decken sich im wesentlichen mit denjenigen, die wir in den sechs ersten Abschnitten dieses Teiles wiedergegeben haben. Doch sind zwei Unterschiede zu erwähnen.

Die Resultate aus dem Jahre 1868 waren insofern specieller als die hier wiedergegebenen, als die Kugeln noch von unveränderlichem Volumen vorausgesetzt waren. Mit Rücksicht auf die Ziele, die BJERKNES verfolgte, und seine Hoffnungen, durch die Untersuchung periodischer Volumänderungen Kraftgesetze analog dem NEWTON'schen zu finden, war dieses eine wesentliche Lücke. Die Ausfüllung derselben wurde deshalb sofort in Angriff genommen, und gelang in den unmittelbar folgenden Jahren ohne wesentliche Schwierigkeiten.

Der andere zu erwähnende Unterschied hat seinen Ursprung in der gewählten Form der Darstellung, und ist somit scheinbar ein

sehr unwesentlicher. Wir haben in unserer Darstellung von Anfang an die hydrodynamischen Druckkräfte in zwei Partialkräfte, die inducierende und die energetische, zerlegt (90). Das Prinzip der Zerlegung war die Ausscheidung einer Partialkraft, der inducierenden, welche die Form einer totalen Ableitung nach der Zeit hatte. Diese Zerlegung hatte BJERKNES in seinen älteren Untersuchungen nicht benutzt, sondern eine scheinbar viel näher liegende, wobei die Kräfte in die auf den Geschwindigkeitskomponenten und die auf den Beschleunigungskomponenten der einzelnen Kugeln beruhenden Partialkräfte zerlegt wurden. Diese Zerlegung schien um so vorteilhafter, als es dadurch gelang, mit Hilfe eines einfachen Satzes die eine Kugel angreifende scheinbare Fernkraft auf eine Kraft einfacherer Natur zu beziehen, nämlich auf die ein Flüssigkeitselement angreifende beschleunigende Kraft, die man durch Differentiation des Druckes und Division mit der Dichte der Flüssigkeit findet. Dieser in der Abhandlung aus dem Jahre 1868 mitgeteilte Satz läßt sich folgendermaßen wiedergeben:

„Die im Mittelpunkte der Kugel g angreifende, von der Bewegung einer entfernten Kugel k herrührende Kraft hat dieselbe Richtung, wie die im Mittelpunkte der Kugel g angreifende beschleunigende Kraft, wenn dieser Punkt der Flüssigkeit angehört hätte, und ist an GröÙe gleich dieser beschleunigenden Kraft, multipliciert mit dem dreihalffachen der von der Kugel verdrängten Flüssigkeitsmasse.“

Dieser Satz ist gültig, solange man sich auf die Berücksichtigung derjenigen Fernkräfte beschränkt, die wir als Kräfte niederer Ordnung bezeichnet haben, und man außerdem die Volumina der Kugeln konstant annimmt. Wenn man diese beschränkenden Voraussetzungen macht, kann man deshalb das Studium der auf die Kugeln ausgeübten Fernkräfte durch das viel einfachere Studium der auf die Flüssigkeitspartikelchen ausgeübten Kräfte ersetzen, die ihrerseits auch als scheinbare, von den entfernten bewegten Kugeln ausgehenden Fernkräfte aufgefaßt werden konnten.

220. Folgen der früheren Zerlegung der hydrodynamischen Fernkräfte. — Die Partialkräfte, die man erhält, wenn man die totale Fernkraft in die auf Geschwindigkeit und die auf Beschleunigung beruhenden Kräfte zerlegt, haben nicht mehr die Fundamentealeigenschaften, die wir für die inducierende und die energetische Fernkraft abgeleitet haben, daß die erstere nur verborgene Bewegungen hervorruft, und daß für die letztere, welche allein die sichtbaren

Bewegungen erzeugt, das Prinzip von der gleichen Wirkung und Gegenwirkung gültig ist. Bei der früheren Zerlegung der Kraft findet man deshalb nur das negative Resultat, daß das Gegenwirkungsprinzip für die hydrodynamischen Fernkräfte nicht allgemein besteht. Das positive Resultat, daß für die die sichtbaren Bewegungen erzeugenden Kräfte das Gegenwirkungsprinzip gültig ist (180), ein Resultat, das wir kurz als das hydrodynamische Gegenwirkungsprinzip bezeichnen können, war also im Jahre 1868 noch nicht gefunden.

Mit dieser Unvollständigkeit folgte zugleich eine andere: denn in demselben Augenblicke, wo die hydrodynamische Fernkraft in Induktionskraft und Energiekraft zerlegt wird, tritt die Analogie mit den elektrischen und den magnetischen Fernkräften von selbst hervor: die Kräftefunktionen der Energiekräfte sind ganz ähnlich gebaut, wie die Ausdrücke der gegenseitigen potentiellen Energie elektrischer und magnetischer Teilchen. Wenn man dagegen die Glieder der Induktionskraft und der Energiekraft nicht voneinander trennt, verschwindet diese Analogie; oder vielmehr, sie tritt nur bruchstückweise und in so verzerrten Formen auf, daß sie nur irreleitend wirken kann, und man leicht zu dem Schlusse geführt wird, daß keine wirkliche, zusammenhängende Analogie besteht.

Wir werden dies leicht sehen, wenn wir die in 172(c) gegebene Kräftefunktion Ω_{ky} für die Summe von Induktions- und Energiekraft entwickeln. Wir nehmen dabei das Volumen beider Kugeln konstant an, so daß $\dot{E}_y = \dot{E}_k = 0$. Ω_{ky} wird dann

$$\Omega_{ky} = \frac{3}{2} q E_y \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \frac{3}{2} q E_y \left\{ \dot{a}_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial a_k} + \dot{b}_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial b_k} + \dot{c}_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial c_k} \right\},$$

φ_k ist hier nach der oft angewendeten Abkürzung anstatt $(\varphi_k)_y$ geschrieben, welches nach 166(d), und wenn $\dot{E}_k = 0$, die Form

$$(\varphi_k)_y = - \dot{F}_k \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{ky}} - \dot{G}_k \frac{\partial}{\partial b_k} \frac{1}{4\pi r_{ky}} - \dot{H}_k \frac{\partial}{\partial c_k} \frac{1}{4\pi r_{ky}}$$

hat. Nach Einführung der Werte 166(a) der Komponenten des Aktionsmomentes geht diese Gleichung über in

$$(\varphi_k)_y = - \frac{3}{2} E_k \left\{ \dot{a}_k \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{ky}} + \dot{b}_k \frac{\partial}{\partial b_k} \frac{1}{4\pi r_{ky}} + \dot{c}_k \frac{\partial}{\partial c_k} \frac{1}{4\pi r_{ky}} \right\}.$$

Setzen wir dies in Ω_{ky} ein, und erinnern uns daran, daß $\frac{\delta}{\delta t}$ eine

Differentiation nach der Zeit bedeutet, die nicht das in a_g, b_g, c_g und a_k, b_k, c_k eingehende t berühren soll, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \Omega_{kg} = & -\frac{3}{2} q E_g E_k \left\{ \ddot{a}_k \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \ddot{b}_k \frac{\partial}{\partial b_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \ddot{c}_k \frac{\partial}{\partial c_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right\} \\
 (a) \quad & -\frac{9}{4} E_g E_k \left\{ \dot{a}_k^2 \frac{\partial^2}{\partial a_k^2} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{b}_k^2 \frac{\partial^2}{\partial b_k^2} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \dot{c}_k^2 \frac{\partial^2}{\partial c_k^2} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right. \\
 & \left. + 2 \dot{b}_k \dot{c}_k \frac{\partial^2}{\partial b_k \partial c_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + 2 \dot{c}_k \dot{a}_k \frac{\partial^2}{\partial c_k \partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + 2 \dot{a}_k \dot{b}_k \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial b_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right\}.
 \end{aligned}$$

Diese Kräftefunktion stellt also die totale Fernkraft dar, welche die Kugel k gegen die Kugel g ausübt, und zwar geben die erste Zeile die von der Beschleunigung, die beiden letzten die von der Geschwindigkeit der wirkenden Kugel k abhängige Partialkraft. Nach Symmetrie kann man eine ähnliche Kräftefunktion für die Rückwirkung der Kugel g auf die Kugel k aufstellen.

Sowohl die von der Geschwindigkeit, als die von der Beschleunigung abhängige Kraft kann nun mit einer magnetischen Kraft verglichen werden. Die Partialkraft, die man aus den beiden letzten Zeilen durch Ableitung nach a_g, b_g, c_g findet, kann mit derjenigen Kraft verglichen werden, die ein Elementarmagnet auf einen anderen ausübt: sie hat dieselbe Gröfse und die entgegengesetzte Richtung wie die Kraft, mit der ein Elementarmagnet in dem Punkte k auf einen Elementarmagnet im Punkte g wirkt, wenn die Achsen beider Elementarmagnete die Richtung der Geschwindigkeit ($\dot{a}_k, \dot{b}_k, \dot{c}_k$) der Kugel k haben, und ihre magnetischen Momente dieser Geschwindigkeit proportional sind. Die durch die erste Zeile von (a) dargestellte, von der Beschleunigung der Kugel k abhängige Partialkraft kann mit derjenigen Kraft verglichen werden, die ein Elementarmagnet auf einen magnetischen Pol ausübt: sie hat dieselbe Gröfse und dieselbe Richtung wie die Kraft, mit der ein Elementarmagnet in dem Punkte k , dessen magnetisches Moment proportional der Beschleunigung ($\ddot{a}_k, \ddot{b}_k, \ddot{c}_k$) der Kugel k ist, auf einen Magnetpol in g wirkt, dessen Polintensität proportional dem Volumen E_g der Kugel g ist.

Man findet also zwei nebeneinander bestehende Analogien: in der einen tritt die Geschwindigkeit, in der anderen die Beschleunigung der wirkenden Kugel als die mit dem magnetischen Momente zu vergleichende Gröfse auf. Gleichzeitig wird die Kugel, die die Kraft erleidet, einmal mit einem Magnetpole verglichen und ein anderes Mal mit einem Magnet, dessen magnetisches Moment aber nicht

mit ihrer eigenen Geschwindigkeit, sondern mit der der wirkenden Kugel zu vergleichen ist. Für die Rückwirkung der Kugel g auf die Kugel k sind alle diese Betrachtungen umzukehren.

Nichts läßt ahnen, daß hinter diesen bizarren Analogien doch eine einfache Analogie steckt, bei der jede Kugel einen Magnet vertritt, dessen magnetisches Moment ihrer eigenen Geschwindigkeit proportional ist, und daß man diese Analogie finden kann, einfach durch ein verändertes Aufschreiben der Formeln, oder auch durch die Berechnung des Mittelwertes der Kraft im Falle synchroner Schwingungen. Wenn es BJERKNES auch nicht in der letzteren Weise gelang die Analogie und das damit zusammenhängende hydrodynamische Gegenwirkungsprinzip zu finden, so beruhte es nicht darauf, daß er diesen Weg nicht versuchte, denn er hatte von Anfang an den Fall schwingender Bewegungen im Auge gehabt. Die Ursache war wieder die unzuweckmäßige Teilung der Kraft, die die Berechnung des Mittelwertes erschwerte. Denn wenn man die Form (a) zu Grunde legt, dürfen die Zeitvariationen der in r_{kg} implicate enthaltenen Größen a_k, b_k, c_k und a_g, b_g, c_g nicht vernachlässigt werden. Die Folge war, daß er durch ungenaue Überlegungen zu dem unrichtigen Schluß geführt wurde, daß die Kraft im Mittel Null sei.

So ermunternd an sich die im Jahre 1868 gefundenen Sätze auch waren, so blieb das Resultat deshalb doch lange Zeit eine Enttäuschung. Der Gedanke an Fernwirkungen analog denjenigen der Natur wurde allerdings nie aufgegeben, aber trat doch während mehrerer Jahre in den Hintergrund für die Bearbeitung des Gegenstandes von rein mathematischer Seite. So erschien im Jahre 1871 die Abhandlung „Sur le mouvement simultané etc.“, (vergl. S. 58), welche die vollständige Darstellung des Geschwindigkeitspotentials des Kugelsystems enthielt und auch die Grundlage unserer Entwicklungen im kinematischen Teile gebildet hat. In diesen Jahren wurden auch die älteren Untersuchungen über die Bewegung des Ellipsoides wieder aufgenommen, weiter geführt und publiciert (vergl. S. 232). Dies war allerdings wieder ein Problem von der Bewegung nur eines einzigen Körpers. Anzeichen der Spekulationen über scheinbare Fernwirkungen treten aber doch hervor in den folgenden Worten, die wir aus diesem Aufsätze citieren:

„Man könnte weiter die Wirkungen der fortschreitenden Bewegung einer Kugel, deren Geschwindigkeit eine einförmige wäre, mit der Wirkung eines Magnetes auf einen fernliegenden Magnet, das Flüssigkeitselement, vergleichen; nur daß man immer annehmen

müßte, die magnetische Achse desselben Elementes würde sich stets frei richten, parallel und entgegengesetzt der Achse der Kugel — diese Achse übrigens nach Richtung der fortschreitenden Kugel gewählt. — Auf ähnliche Weise könnte man, stets aber mit gewissen Begrenzungen, die Wirkung der fortschreitenden accelerierenden Bewegung, sofern man die aus der Geschwindigkeit herrührende Kraft vernachlässige, als die Einwirkung eines Magnetes des Raumes R_n auf einen fernliegenden Magnetpol auffassen, etc.“

Direkt bezieht sich dies nur auf die Fernkräfte gegen ein Flüssigkeitspartikelchen. Mit Hilfe des oben citierten Satzes aus der Abhandlung von 1868 kommt man aber sofort zu der Fernkraft gegen eine Kugel, und man erkennt die durch die Kräftefunktionen (a) dargestellten Resultate und die zerrissene und verdrehte Analogie wieder.

221. Die rein hydrodynamische Methode und die Methode des Hamilton'schen Prinzips zur Ableitung der hydrodynamischen Druckkraft. — Zur Ableitung seiner Resultate hatte sich BJERKNES immer der rein hydrodynamischen Methode mit der expliciten Berechnung des Druckes gegen die Oberfläche der Kugel bedient, die wir auch in unserer Darstellung zu Grunde gelegt haben. Die von Lord KELVIN und TAIT 1867 in ihrem „Treatise on Natural Philosophy“ eingeführte neue Methode für das Studium der Bewegung fremder Körper in einer Flüssigkeit, nach der man nicht den Druck zu betrachten braucht, sondern durch Anwendung der allgemeinen LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen oder des HAMILTON'schen Prinzips auf die Werte der Druckkräfte schließt, war ihm noch unbekannt. Diese Methode hat aber, wie wir gesehen haben, den eigentümlichen Vorteil, daß sie vom Anfange an die hydrodynamische Druckkraft in der Form von zwei Partialkräften giebt, deren die eine die Induktionskraft und die andere die Energiekraft ist (194), während man, wenn man die rein hydrodynamische Methode verwendet, erst nach einer Umformung des gefundenen Ausdrucks der Kraft auf diese Zerlegung kommt (87). Bei Anwendung der neuen Methode konnte deshalb die Entdeckung des hydrodynamischen Gegenwirkungsprinzips und der Analogie mit den elektrischen und magnetischen Fernkräften nicht lange unterbleiben. Lord KELVIN hatte auch diese Methode zur Untersuchung der von SCHELLBACH und GUTHRIE experimentell studierten akustischen Anziehungen und Abstosungen angewendet, und dabei in dem behandelten Specialfall das hydrodynamische Gegenwirkungsprinzip und die Analogie mit

den temporär-magnetischen Erscheinungen erkannt¹, ohne jedoch seine Formeln und Rechnungen zu publicieren.

BJERKNES hat aber erst auf einem Umwege diese neue Methode kennen gelernt. Sie wurde von KIRCHHOFF aufgenommen und in seiner Mechanik besonders auch zu der Untersuchung der Bewegung zweier Kugeln unveränderlichen Volumens in einer Flüssigkeit benutzt. Dafs KIRCHHOFF dabei nicht selbst die Eigenschaften der beiden Partialkräfte bemerkt hat, auf die die Rechnung nach seiner Methode führt, darf nicht überraschen, da er offenbar nur ein Beispiel hat durchrechnen wollen, und nicht dieselben Ziele wie BJERKNES im Auge hatte. Ohne deshalb die Partialkräfte getrennt aufzuschreiben, bildet er ihre Summe, um dann den Fall zu betrachten, dafs sich die Kugeln mit konstanten Geschwindigkeiten bewegen. Die Kräftefunktion wird dann die durch die beiden letzten Zeilen der Formel 220(a) gegebene, wo das hydrodynamische Gegenwirkungsprinzip und die einfache Analogie mit den magnetischen Fernkräften verschwunden ist, während nur die verzerrte Analogie auftritt. Nachdem KIRCHHOFF auf die Nicht-Gültigkeit des Gegenwirkungsprinzipes für die gefundene Kraft aufmerksam gemacht hat, fügt er die folgende Bemerkung hinzu:

„Es möge angeführt werden, dafs die Kraft, die die zweite Kugel auf die erste ausübt, dieselbe Gröfse und die entgegengesetzte Richtung als die Kraft hat, mit der ein magnetisches Molekül in der zweiten Kugel auf eines in der ersten wirkt, wenn die magnetischen Achsen beider parallel der Bewegungsrichtung der zweiten Kugel und ihre magnetischen Momente gleich den Produkten der Geschwindigkeit dieser in u. s. w.“

Als BJERKNES im Frühjahr 1875 mit diesem Resultat bekannt wurde, das in der im Juli 1874 erschienenen zweiten Lieferung der KIRCHHOFF'schen Mechanik enthalten war, fand er deshalb eine vollständige Übereinstimmung mit seinem eigenen, was die in Worte formulierte Konklusion betraf. Man beachte nur die der Form nach verschiedene, dagegen dem Sinne nach übereinstimmende Ausdrucksweise, in der KIRCHHOFF von gleichgerichteten magnetischen Achsen und entgegengesetzt gerichteter Kraft, BJERKNES dagegen von entgegengesetzt gerichteten Achsen und gleichgerichteter Kraft spricht.

Die Wahrnehmung, dafs die von KIRCHHOFF verwendete Me-

¹ Sir W. THOMSON: Letters to FREDERICK GUTHRIE, November 1870. *Philosophical Magazine*. Vol. 41, pag. 423. 1871. Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism. pag. 571—578. 1872.

thode zu demselben Resultate führte, ohne etwas neues zu bringen, wäre vielleicht für die Fortsetzung von BJERKNES' Arbeiten bedeutungslos geblieben, wenn nicht in den Formeln ein Unterschied in Bezug auf ein Vorzeichen und einen Koeffizienten vorhanden gewesen wäre. Dieses führte BJERKNES zu einer eingehenden Revision seiner eigenen und der KIRCHHOFF'schen Rechnungen,¹ und dabei hat er die Zerlegung der Kraft, zu welcher die KELVIN-KIRCHHOFF'sche Methode führt, bemerkt, und die Folge davon war, daß er das hydrodynamische Gegenwirkungsprinzip und die Analogie mit den elektrischen und magnetischen Fernkräften fand. Die Resultate wurden der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania am 24. September 1875, jedoch ohne Ableitungen, mitgeteilt.² Die Ableitungen auf Grundlage des HAMILTON'schen Prinzips, aber ohne Eingehen auf die Eigenschaften der Kräfte und auf die Analogien, wurden im folgenden Jahre in den Göttinger Nachrichten publiciert.³

222. Entwicklung der Untersuchungen nach 1875. — Der im Jahre 1875 gemachte Fortschritt in der Theorie der hydrodynamischen Fernkräfte beruhte also ausschließlich auf der endlich gefundenen Teilung dieser Kräfte in inducierende und energetische Fernkräfte. Die Wichtigkeit dieser Teilung ist aber auch bei den weiteren Untersuchungen immer mehr hervorgetreten. Denn die späteren Fortschritte der in diesem Bande dargestellten Theorien sind zuletzt alle auf das bessere Verständnis der eigentümlichen Wirkungsweise der einen der in Frage kommenden Partialkräfte, nämlich der Induktionskraft zurückzuführen.

Die Resultate aus dem Jahre 1875 bezogen sich noch allein auf

¹ Vergleiche die auf Veranlassung von BJERKNES der letzten Lieferung von KIRCHHOFF's Mechanik beigefügten Verbesserungen zu den Seiten 231, 232, 248, 249, 250 und der in späteren Auflagen eingeführte Hinweis auf BJERKNES' Arbeiten (S. 232). Der Fehler war offenbar ein nachträglich hineingekommener Schreib- oder Druckfehler, wie man nach der Richtigkeit der in Worte gefaßten Schlußfolgerung annehmen muß.

² C. A. BJERKNES, Foreløbige Meddelelser om de Kræfter, der opstaa, naar kugleformige Legemer, idet de udfører Dilatations- og Kontraktionsvingninger, bevæge sig i et inkompressibelt Fluidum. Videnskabselskabets Forhandlinger, Christiania 1875. Repertorium der reinen und angewandten Mathematik. Bd. I, S. 264. 1877.

³ Über die Druckkräfte, die durch gleichzeitige mit Kontraktionen und Dilatationen verbundene Bewegungen von mehreren kugelförmigen, in einer incompressiblen Flüssigkeit befindlichen, Körpern entstehen. Göttinger Nachrichten, 6. Mai 1876 p. 245.

die Kräfte, die wir niederer Ordnung genannt haben, und waren also auf die Analogie beschränkt, die die permanenten hydrodynamischen Energiekräfte mit den permanenten elektrischen und energetischen Fernkräften haben. Doch war auch in dieser Analogie eine Lücke insofern vorhanden, als die Möglichkeit der Drehung der oscillierenden Kugel noch nicht erkannt war.

Die Aufmerksamkeit richtete sich in den folgenden Jahren auf zwei Ziele: die experimentelle Verifikation der gefundenen Resultate und die weitere Verfolgung der mit elektrischen und magnetischen Erscheinungen bestehenden Analogien. Dabei trat die Betrachtung der im verborgenen wirkenden Induktionskraft anfänglich vollständig in den Hintergrund. Allmählich zeigte es sich jedoch, daß eben das genauere Studium der Wirkungen dieser Kraft die Grundlage für die weiteren theoretischen Fortschritte bilden mußte.

Ein erstes Zeichen dafür war die Entdeckung der Gesetze der Drehung der Kugel im Jahre 1878, wo, wie wir gesehen haben, die inducierende Kraft ein energetisches Drehungsmoment erzeugt. Noch mehr trat die Wichtigkeit der Induktionskraft hervor, als im folgenden Jahre 1879 die Diskussion der inducierenden Fernkräfte und der auf inducierten Oscillationen beruhenden Energiekräfte zu der Theorie der temporären Energiekräfte und ihrer Analogie mit den Kräften des temporären Magnetismus führte.

Auch dabei war nur eine teilweise Diskussion der Wirkungen der hydrodynamischen Induktionskraft durchgeführt. Neue Aufgaben stellten sich aber für BJERKNES als er 1882 durch MASCART und JOUBERT's „Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme“ mit der FARADAY-MAXWELL'schen Vorstellung von elektrischen und magnetischen Feldern bekannt wurde. Bis dahin hatte er immer die alten Formen der Lehre von der Elektrizität und dem Magnetismus zu Grunde gelegt. Jetzt entstand die Frage von der Analogie hydrodynamischer Felder mit den elektrischen und magnetischen. Daß solche Analogien für den äußeren Raum, also für die Stromfelder, bestanden, war schon längst eine Thatsache. Die große Frage war aber diejenige von den Feldern innerhalb der Kugeln und die von den Bedingungen, die an der Grenzfläche erfüllt werden mußten.

Die Beschäftigung mit dieser Frage führte zu einem eingehenden Studium der Bewegung einer einzigen Kugel in einem Strome. Dieses hatte zunächst zur Folge, daß die alte rein hydrodynamische Methode zur Ableitung der Druckkräfte wieder aufgenommen wurde. Denn das HAMILTON'sche Prinzip läßt sich nur anwenden, wenn man zugleich die entfernten Kugeln, von denen der Strom ausgeht,

in Betracht zieht, und die unmittelbare Betrachtung des Druckes hat deshalb wieder den Vorzug.

Während diese Untersuchungen somit zu wesentlichen Fortschritten in der formellen Behandlung der Aufgaben führten, blieben sie doch lange Zeit ohne Erfolg in Bezug auf das eigentliche Ziel. Es schien als ob ein Bruch in der Analogie vorhanden wäre. Zuletzt, in der Mitte der achtziger Jahre, führte aber die vollständige Diskussion des Einflusses der Induktionskraft auf die Bewegung der Kugel zu den Resultaten, die wir in den Abschnitten über die hydrodynamische Induktionserscheinung dargestellt haben. Dadurch ist, wie wir in dem nächsten Bande sehen werden, die Frage von der Analogie der hydrodynamischen Erscheinungen mit den elektrischen und magnetischen so weit geführt, wie es möglich ist, solange wir uns streng auf die in der Einleitung gestellte Aufgabe beschränken.

532.5 B626 V01



a39001



006970316b

10000
V, 1

532 5 B626 V01

Bjerknes V. F. K. Vorlesungen über Hydro

INSERT BOOK
MASTER CARD
FACE UP IN
FRONT SLOT
OF S.R. PUNCH



UNIVERSITY OF ARIZONA
LIBRARY

MASTER CARD

GLOBE 90114-0

